MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 5: Aplicaciones de Derivadassssss(El regreso)

30 Agosto 2019

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x)\geq 0, \forall x\in(a,b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x)\leq 0, \forall x\in(a,b)$, entonces f es decreciente.

  Análogo para estrictamente creciente/decreciente
- **[Convexidad]** Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x,y\in[a,b], x<y$ se tiene que
$$f(z)\leq f(x)+\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right](z-x),\quad \forall z\in(x,y)$$
o equivalentemente
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$
- Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f''\geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]** Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x}\in(a,b)$. Entonces, para todo $x>\overline{x}$ (respectivamente $x<\overline{x}$) existe $\xi\in(\overline{x},x)$ (respectivamente $\xi\in(x,\overline{x})$ tal que:
$$f(x)=T_f^k(x-\overline{x})+\frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x-\overline{x})^{k+1}$$
Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$
- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f\cdot g)$ está dada por:
$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a)$$

Estimados y estimadas, espero estén de lo mejor acá estaría la NO PAUTA, de la auxiliar pasada, recuerden para estudiar revisar este material primero, luego de haberle dado su tiempo al ejercicio al desarrollo final.

P1. Analizar completamente la función $f(x)=(1+x)e^{\frac{1}{x}}$ incluyendo:

a) Dominio, paridad, signos y ceros

b) Determine limites laterales en $x=0$ y continuidad ¿Es reparable?

c) Determine asíntotas

d) Estudie crecimiento y concavidad

e) Dibuje el gráfico indicando puntos importantes

a) Intuición: Para este ejercicio hay que recordar varias cosillas de MA1001(Intro), entre ellas la intuición es realizar cada una de las partes que pide la función, no de manera robótica y por inercia. Más bien hacerlo entendiendo lo que esto significa para la función (gráficamente), por lo que interpretar esto es fundamental.

b) Teoría: Es cada una de las definiciones de lo que piden, están las pueden encontrar en el resumen subido a material c:

Recordar que dominio es todos los puntos donde la función esté bien definida.
Paridad está en le resumen como se caracteriza de manera ecuacional[Pág 2] Resumen, donde lo que interpreta la paridad es que es simétrica respecto al eje Y, y la imparidad es simétrica respecto al origen.
Ceros es cuando la función corta al eje X.
Límites laterales es la definición de límite pero cuando ocurre $x \to \bar{x}^{+} \vee x \to \bar{x^{-}}$.¿Cuándo es reparable?tendrá que ver con la igualdad de los laterales?
Asíntotas recordemos que hay 3 tipos, todas están resumidas acá Resumen auxiliar 4 donde deben estudiar todos los tipos, con ayuda de lím conocidos !
Para concavidad capitulo 4 del apunte! recuerden los criterio de estudiar $f(x) \wedge f'(x)$ y estudiar su signo, o ver el crecimiento de $f'(x)$.

c) Matraca:La matraca es hacer todos los cálculos, en un comienzo plantear las ecuaciones para definir bien la función, comprobar las de paridad, calcular las derivadas y límites.

Para los propuestos análogos de estudio de funciones les adjuntaré al final los gráficos correspodnientes, donde podrán comprobar sus desarrollos!!!

P2. *a*) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x)g(y), \qquad f(0) = 1$$

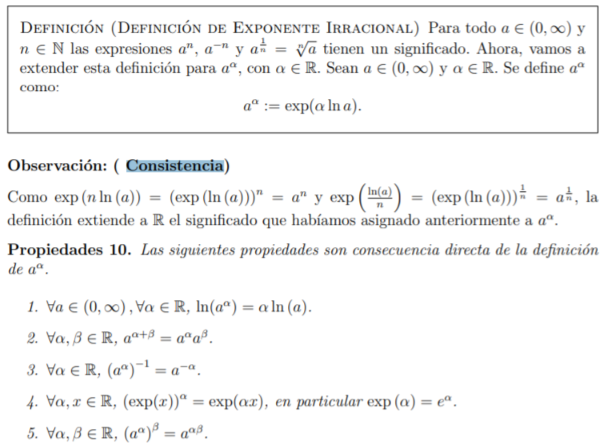
1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2) Demuestre que $\forall n \geq 1$, $g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

a) Intuición: a)
1)La primera pregunta tiene una intuición de calcular la derivada a la fuerza, pero puede que no sea tan conveniente la forma compacta, que nos queda? la definición puede ser un buen camino.
2)Si tengo derivadas enésimas, lo primero que debo pensar es en Lebnitz, esto es porque aquella fórmula nos entrega una para derivadas enésimas, pero ojo con lo que discutiremos en teoría.
b)
Tengo un exponente raro, ¿que hago? Propiedad de consistencia



DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE EXPONENTE IRRACIONAL) Para todo $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ las expresiones a^n, a^{-n} y $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ tienen un significado. Ahora, vamos a extender esta definición para a^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define a^α como:

$$a^\alpha := \exp(\alpha \ln a).$$

Observación: (Consistencia)

Como $\exp(n \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n$ y $\exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right) = (\exp(\ln(a)))^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, la definición extiende a $\mathbb{R}$ el significado que habíamos asignado anteriormente a a^α.

Propiedades 10. *Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α.*

1. $\forall a \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}$.
4. $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$, *en particular* $\exp(\alpha) = e^\alpha$.
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Figura 1: Propiedad consistencia

b) Matraca: a)
1)Calcular el límite por definición ocupando las propiedades que predefine el ejercicio.
2)Armar a la fuerza el producto de funciones que pide la derivada enésima, y expresar la expresión de forma bruta.
b)Una vez que hago la propiedad, que puedo notar al aplicar las propiedades de logaritmo? Si llego auna expresión gané porque ya existe, luego me basta estduiar el signo.

c) Teoría: a)
1)¿Por qué? existe la derivada?sería algo que debo justificar a priori,ocupe la hipótesis?
2)Si una de mis funciones es polinómica, a quien le coloco el coeficiente (k), además recordemos que para usar la fórmula de Lebnitz, debo cumplir todas las hipótesis que están explícitas en el resumen!
b)
El logaritmo debe estar bien definido, y cuando a un límite de cierta forma, debo cumplir ciertas hipótesis para poder hacer un desarrollo que rima con hospital.

P3. **[Taylor derivado]**$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable, tal que $f(x) + f''(x) = 0$, $\forall x \mathbb{R}$. Pruebe que es n veces derivable, y que si sabemos de antemano $f(0) = f'(0) = 0$ debe ser la función nula.

a) Intuición: Me dan una EDO, donde yo quiero saber como se comporta, luego entonces me conviene ver cuanto me da la tercera derivada, y la cuarta, y la quinta, ¿qué pasó?, se repite? entonces que puedo concluir? Luego de descubrir que es n-veces derivable, me están dando la evaluación de la función en un punto y de su derivada, entonces tengo unas ecuaciones de las derivadas en un punto en particular, me está dando un orden, y un punto en el cual le puedo realizar su expresión de Taylor que me será de ayuda!
Luego para ver que la función es nula, como podemos llegar a un valor fijo de una función? qué ocurre si la acoto inferior y superiormente por la constante? a donde le queda ir a la función?.

b) Matraca:Expresar de manera explícita la expansión de Taylor de la función,a demás de la parte anterior calcular las derivadas, pero notar que la matraca reside en la definición y ocupar las propiedades que nos definen en el enunciado (la única ecuación)

c) Teoría: La teoría en este ejercicio, es ver que estén bien definidas las derivadas, y el por qué?.
Para expresar el polinomio de Taylor este posee una hipótesis matemática que debe ser cumplida,

luego también para usar el Teorema del Sándwich para terminar el ejercicio, debo cumplir la hipótesis correspondiente.
Además debo encontrar una cota para la función que no tenga dependencia del orden de la derivada que estoy haciendo, porque de lo contrario no estaremos demostrando nada!

Propuestos

1. A desarrollar:
   Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3ln(x)}{x}$$

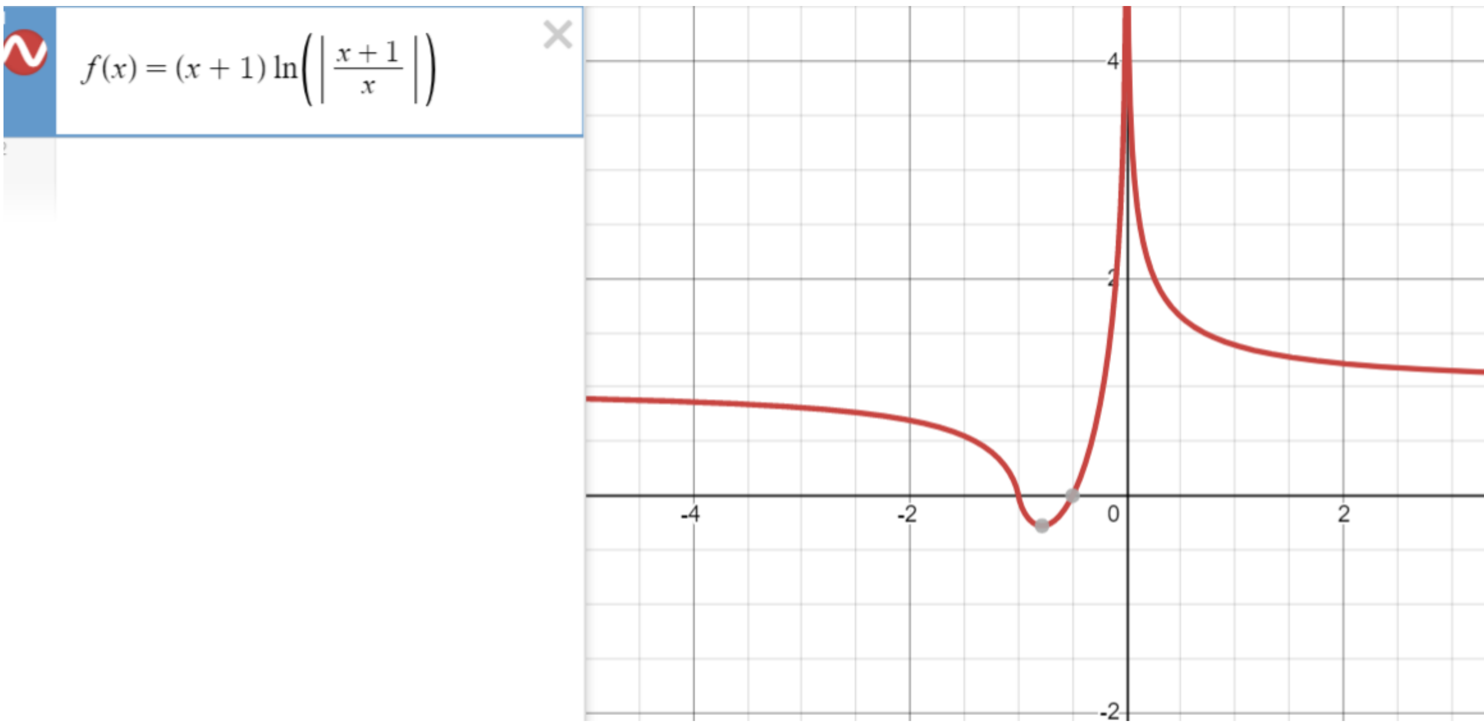


Figura 2: Gráfico para comprobar desarrollo.

2. A desarrollar x2
   Considere la función $f(x) = (x+1)ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

   a) Encuentre ceros y signos de f

   b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los limites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que ea continua, o biem, detecte si hay asíntotas verticales.

   c) Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$

e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa

f) Estudie los limites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 0^{-1}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f

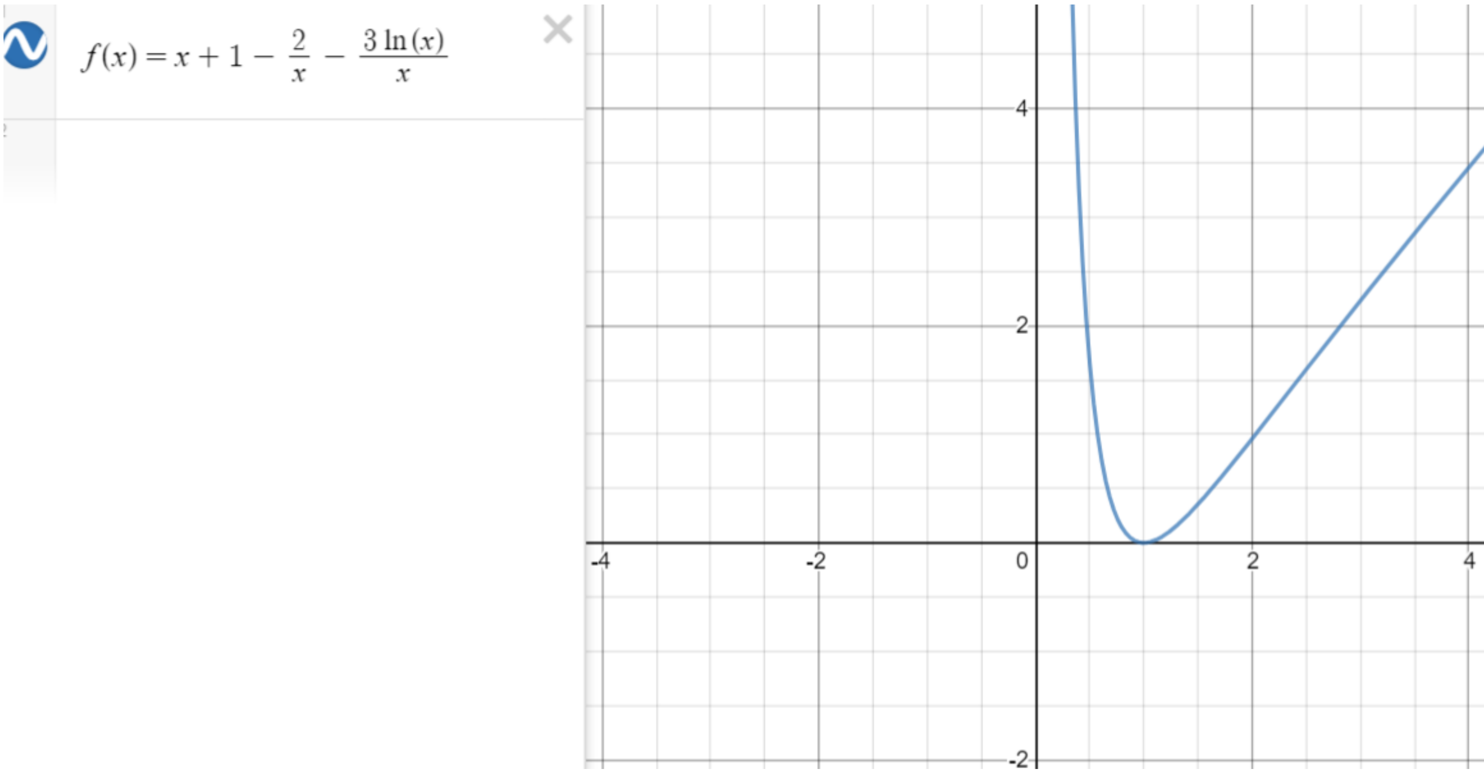


Figura 3: Gráfico para comprobar desarrollo.

"It is not the task of the University to offer what society asks for, but to give what society needs."
Edsger W. Dijkstra

1) Sea función $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

~~$y = x^2 + 5 \Rightarrow \sqrt{y-5} = x$~~

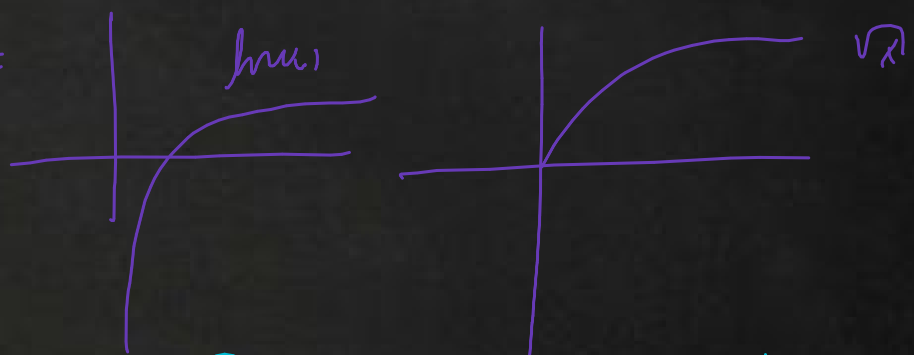
~~$\Rightarrow y = \sqrt{x-5}$~~

~~$\Rightarrow x \geq 5$~~

Dominio, ceros, crecimiento, puntos críticos, asíntotas, punto inflexión, convexidad, gráfico, taylor.

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

\#



① $\ln(x)$ bien definido $x > 0$

② $\sqrt{x}$ bien definida $x > 0$

③ $\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

① $\cap$ ② $\cap$ ③ $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$Z(f) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

$$Z(f) := \{ x \in Dom(f) \text{ tq } f(x) = 0 \}$$

$$f(x) = 0 \iff \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \ / e^x$$
$$\Rightarrow x = 1$$

$$Z(f) = \{ 1 \}$$

Crecimiento

Calcularemos $f'(x)$ $\quad \# \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)'$$

Sabemos que $\ln(x)$, $\sqrt{x}$ derivables en $\mathbb{R}^+$
$\Rightarrow$ por algebra y composición su cociente lo es también
$\Rightarrow$ continua será el cociente $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en $\mathbb{R}^+$

$$\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$\# (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

def $\Downarrow \qquad \Uparrow$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{x} - \ln(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\,x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - \ln(x)\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}}$$, si quiero signos

Hay tabla

$$f'(x) = \frac{2-\ln(x)}{2x^{3/2}}$$

$2-\ln(x)=0$

$2=\ln(x) \quad / e^{(\,)}$

$\boxed{e^2 = x}$

	$-\infty$	$x^{3/2}$	0	e^2	$+\infty$
$2-\ln(x)$			$+$	$-$	
$2x^{3/2}$			$+$	$+$	
			$+$	$-$	

$f'(x) \geq 0$ si $x \in (0, e^2] \Rightarrow f(x)$ creciente si $x \in (0, e^2]$

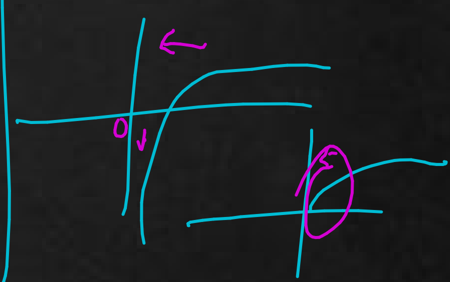
$f'(x) \leq 0$ si $x \in (e^2, \infty) \Rightarrow f(x)$ decreciente si $x \in (e^2, \infty)$

L'Hopital límites $\frac{\infty}{\infty} \wedge \frac{0}{0}$

$\infty^{\infty} \quad 1^{\infty} \quad 0^{0}$

$\Rightarrow \lim f^g = e^{\lim g \ln f}$

$$f-g = \frac{\frac{f}{g} - \frac{g}{f}}{\frac{g+f}{gf}}$$



Asíntotas vertical $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -\infty$

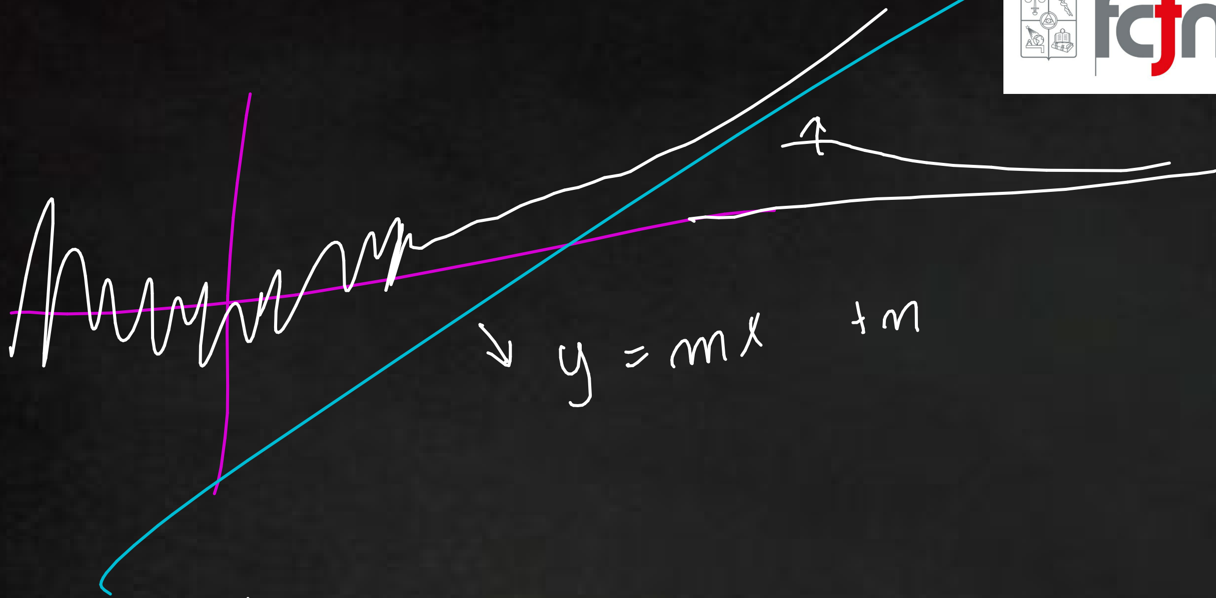
Asíntotas horizontal

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abuso de notación

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Asintoto oblicua



$y = mx + n$

\# Punto crítico $x=0$

$$f''(x) = \left(\frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}} \right)' = \frac{(2-\ln(x))' \, 2x^{3/2} - (2-\ln(x))(2x^{3/2})'}{4x^3}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \frac{2 \cdot x^{3/2}}{4x^3} + \frac{(-2+\ln(x)) \, 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}}{4x^3}$$

$$= \frac{-2x^{1/2} - 6x^{1/2} + 3\ln(x)\, x^{1/2}}{4x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-8 + 3\ln(x)}{4x^{5/2}}$$

TABLA → con

	~~$-\infty$~~	0	$e^{8/3}$	$+\infty$
$-8+3\ln(x)$		$-$		$+$
$4x^{5/2}$		$+$		$+$
		$-$		$+$

verificad.

$-8+3\ln(x)=0$

$\ln(x) = \frac{8}{3}$

$x = e^{8/3}$

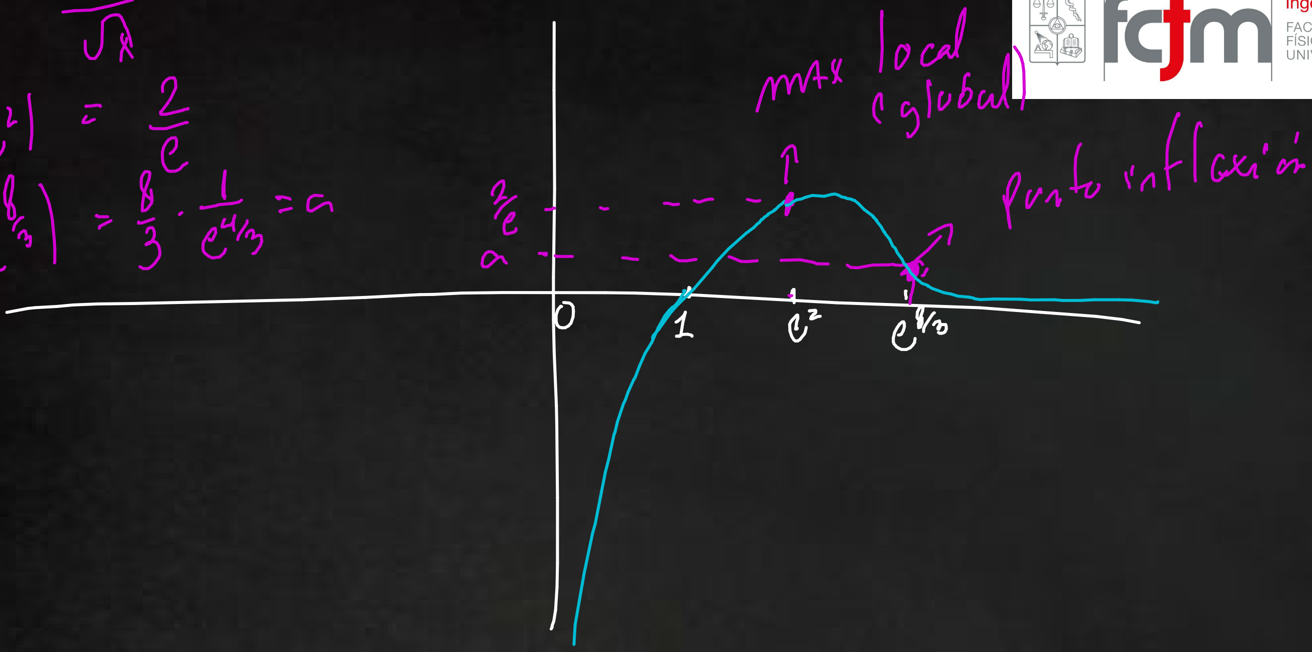
$f''(x) \leq 0$ si $x \in (0, e^{8/3})$

$f''(x) \geq 0$ si $x \in [e^{8/3}, \infty+)$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

$f(e^2) = \frac{2}{e}$

$f(e^{8/3}) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{e^{4/3}} = a$



$f(x) = 0 \quad x = 1$

f creciente $x \in (0, e^2)$

f decreciente $x \in (e^2, \infty+)$

f concava $x \in (0, e^{8/3})$

f convexa $x \in (e^{8/3}, \infty+)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$f < 0$ si $x \in (0, 1)$

$f > 0$ si $x \in (1, \infty+)$

x^2

$\downarrow$

$2x$

$\downarrow$

$2 > 0$

Convexa

a) f, g derivable tal que.

1) $g(x) = x f(x) + 1$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) = g(x) g(y)$

3) $f(0) = 1$

<u>Pdq</u> $g'(x) = g(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$, lo primero que nos dice la intuición

Es tomar 1) $g(x) = x f(x) + 1 \quad | \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow g'(x) = f(x) + x f'(x) \overset{?}{=} x f(x) + 1$$

En realidad no tenemos la información necesaria. Por lo que el otro método que podemos explorar. Es definición.

$$\frac{d g(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x}+h) - g(\bar{x})}{h} \; ; \; \forall \bar{x} \text{ arbitrario. En dom}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x}) g(h) - g(\bar{x})}{h} \quad 2)$$

definición 3)

$$= g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h} = g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \frac{h f(h) + 1 - 1}{h} = g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \cancel{f(h)}^{1}$$

$$= g(\bar{x}) \; //$$

PDQ | $\forall n \geq 1$, $g(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$

Veamos primero lo siguiente

$g(x) = x f(x) + 1$ / $()'$

$g'(x) = (x f(x))'$ / $()'$

$g''(x) = (x f(x))''$ /

$\vdots$

$g^{(n)}(x) = (x f(x))^{(n)}$

Fórmula de Leibnitz, Sean f y g derivables de orden (n)

$$(fg)^{n}_{(a)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

$$(x f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} f(x)^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} x^{(0)} f(x)^{(n-0)} + \binom{n}{1} x^{(1)} f(x)^{(n-1)} + \binom{n}{2} x^{(2)} f(x)^{(n-2)}$$

$\rightarrow 0 + 0 + \_\_ 0$

n-ésimo.

$$+ \_\_\_ \binom{n}{n} x^{(n)} f(x)^{(n-n)}$$

$$= \frac{\cancel{m!}}{0!\,\cancel{m!}}\, x\, f(x)^{(m)} + \frac{m!}{1!\,(m-1)!}\, 1 \cdot f(x)^{(m-1)}$$

$$= x\, f(x)^{(m)} + m\, f(x)^{(m-1)} \;/\!/ = g^{(m)}(x) \quad ☆$$

Luego $g^{(m)}(x) = g(x)$ ♡

En efecto por inducción.

$\underline{\text{CB}}$ $g^{(0)}(x) = g(x)$ ✓

$\underline{\text{HIP}}$ $g^{(m-1)}(x) = g(x)$

$\underline{\text{PASO Inductivo}}$ $g^{(m)}(x) = g(x)$ $\underline{\text{PDQ}}$

$$g^{(m)}(x) = \left[g^{(m-1)}(x)\right]' = g'(x) = g(x) \quad \blacksquare$$

$$\overset{♡}{\Rightarrow} g(x) = g^{(m)}(x) \overset{☆}{=} x\, f(x)^{(m)} + m f(x)^{(m-1)} \;/\!/$$

$x=0$

$$g(0) = 0 \cdot \cancel{f(0)}^{0} + 1 = 0 \cdot \cancel{f^{(m)}(0)}^{0} + m f(0)^{(m-1)}$$

$$\frac{1}{m} = f^{(m-1)}(0) \quad , \forall m \in \mathbb{N}$$

$$m = m'+1 \Rightarrow \quad \frac{1}{m+1} = f^{(m)}(0) \quad , \forall m' \in \mathbb{N}$$

Scanned with CamScanner

b) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Demuestre

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$ existe, es positivo y calcúlelo.

Sea $y = \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$; $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x + x\delta) >$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta} = y > 0 \quad / \ln(x)$$

constante respecto δ

$$\frac{\ln[f(x + \delta x)] - \ln(f(x))}{\delta} = \ln(y) \quad / \lim_{\delta \to 0}$$

puedo usar L'Hopital luego los límites están bien definidos por ser diferenciable y es $\frac{0}{0}$.

$$\Rightarrow \overset{LH}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{f'(x + \delta x) \cdot x}{f(x + \delta x)} - 0}{1} = \ln(y)$$

$$= \frac{f'(x)x}{f(x)} = \ln(y) \quad / e^x$$

$$e^{\frac{f'(x)x}{f(x)}} = y > 0$$; existe y positivo! $\forall x \in \mathbb{R}$.

P[redacted]) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable tal que

$$f(x) + f''(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Mostrar que es n veces derivable

b) Si sabemos $f(0) = f'(0) = 0$, pruebe que debe ser la función nula, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-f(x+h) + f(x)}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x)$$ por lo que $f'''(x)$ existe. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f^{(IV)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-f'(x+h) + f'(x)}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = -f''(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= f(x) \ //.$$

Notemos que $f^{(n)}(x) \in \{f(x), f'(x), -f(x), -f'(x)\}$

El conjunto $\mathbb{N}$ lo puedo particionar

en $A \begin{cases} x \equiv 0 \mod(4) \\ x \equiv 1 \mod(4) \\ x \equiv 2 \mod(4) \\ x \equiv 3 \mod(4) \end{cases}$ luego como A es una partición de $\mathbb{N}$, a través

del principio de inducción se tendrá //

tenemos derivable $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ implica $\underline{\text{diferenciable}}$ $\Longleftrightarrow$ Equivale en $\mathbb{R}$.

luego derivable $\Rightarrow$ continua por lo que f y f' serán continuas, así $f^{(n)}$ será continua $\forall n \in \mathbb{N}$

existe y además esa derivada

Con lo que se concluye $C^{\infty}(\mathbb{R})$ //

Veamos $f(0) = f'(0) = 0$ (1)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$f(x) = T_f^k (x-\bar{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\varepsilon)}{(k+1)!} (x-\bar{x})^{k+1}$

Esto es el error $\theta(\cdot)$ en desarrollo de Taylor; haciendo su Expansión de Taylor en $[-x,x]$ en torno a 0

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!} + \frac{f^{(m+1)}(\xi)\, x^{m+1}}{(m+1)!} \; ; \xi \in [-x,x]$$

Por (1) $f(0) = f'(0) = 0$; sigo derivando una constante

$f^{(m)}(0) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Luego $f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)\, x^{m+1}}{(m+1)!}$ Cauchy-Swartz

$$|f(x)| \leq \frac{|f^{(m+1)}(\xi)|\, |x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

siempre estaré acotado por lo más positivo que puedo ser y lo más negativo.

Como $\xi \in [-x,x]$ cerrado y acotado y $f^{(m+1)}$ es continua por $C^{\infty}(\mathbb{R})$, por Weierstrass alcanza su máximo y mínimo, por lo que está acotada.

$\Rightarrow |f^{(n+1)}(\xi_x)| \leq M_{(n+1)}$; pero recordemos

$|f^{(n+1)}(\xi)| \in \{|f(\xi)|, |f'(\xi)|\}$; entonces puedo

caracterizar $M_{(n+1)} = \max\{|f(\xi)|, |f'(\xi)|\}$

una constante que no depende de n..

$\Rightarrow$

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} M \quad , \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

tomando limite $n \to \infty$

$$0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$ Sándwich.

Estudiemos $f(x) = (1+x)e^{1/x}$.

a) Dom $\mathbb{R} - \{0\}$ y estaría bien definida

Paridad. Par $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

Impar $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

$$f(-x) = (1-x)e^{\frac{1}{-x}} \neq f(x).$$

$$-f(-x) = -(1-x)e^{\frac{1}{-x}} \neq f(x)$$

$\therefore$ no es par ni impar.

Signos! Tabla!

	$-\infty$ $\quad -1$	∞
$1+x$	$-$	$+$
$e^{1/x}$	$+$	$+$
	$-$	$+$

la función es negativa si $x \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$

la función es positiva si $x \in (1, \infty+)$,

y formal $(-\infty, 1) \cap \text{Dom}f$.

$(1, \infty) \cap \text{Dom}f$.

Ceros

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^{1/x} = 0$. $\quad e^{1/x} > 0 \;, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow (1+x) = 0$

$\boxed{x = -1}$ ✓

Estudiemos el punto de discordia en 0.

Por alg y composición de continuas la función es continua en su dominio, salvo el 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)e^{1/x}$ Por cambio de variable

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0^+} y \to \infty$

$$= \lim_{y \to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)}_{\text{acotada}} \underbrace{e^y}_{\text{diverge}} = \infty$$

Por otro lado

$= \lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)\, e^{1/x}$ Por cambio de variable

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0^-} y \to -\infty$

$$= \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right) e^y = 1 \cdot 0 = 0$$

Como lim laterales distintos, no es continua en 0.

Scanned with CamScanner

Asíntotas:

Verticales - estudia cuando la imagen se va a más o menos infinito.

Vimos que en 0 es A.V.

Horizontal estudia cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} (1+x)e^{1/x} \overset{\text{abuso notación}}{=} \infty \cdot 1 = \infty$$

$\downarrow$ diverge $\downarrow$ acotado

$$\lim_{x\to-\infty} (1+x)e^{1/x} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Con lo que concluyo que no hay asíntota Horizontal

Oblicua $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)}{x} e^{1/x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x} \lim_{x\to\infty} e^{1/x}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 = m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - \overset{1}{\underset{\uparrow}{}}m \cdot x = \lim_{x\to\infty} (1+x)e^{1/x} - x = \lim_{x\to\infty} x[e^{1/x} - 1] + e^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} + e^{1/x} = 1 + 1 = 2$$

Use lím conocido $\frac{e^y - 1}{y} \to 1$ si $y \to 0$

Scanned with CamScanner

Asíntota oblicua $x+2=y$ //

Vemos que para $-\infty$ también debo estudiarlo pues no tengo paridad!

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1+x)}{x} e^{1/x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$n' = \lim_{x\to-\infty} (1+x)e^{1/x} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(e^{1/x}-1) + e^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} + e^{1/x} = 1+1 //$$

$y = x+2$ de igual manera, pero no siempre pasa.

A derivar.

$$f'(x) = e^{1/x} + (1+x)\cdot e^{1/x} \cdot -\frac{1}{x^2}$$

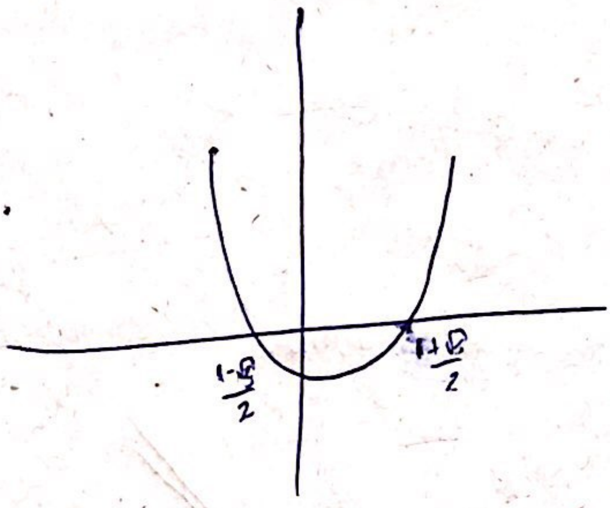
$$= e^{1/x}\left[1 - \frac{(1+x)}{x^2}\right] = e^{1/x}\left[\frac{x^2-x+-1}{x^2}\right]$$

mi signo es dependiente de x^2-x-1 pues $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$e^{1/x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Scanned with CamScanner

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Entonces como

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty+\right)$

Es creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \{0\}$

Es decreciente.

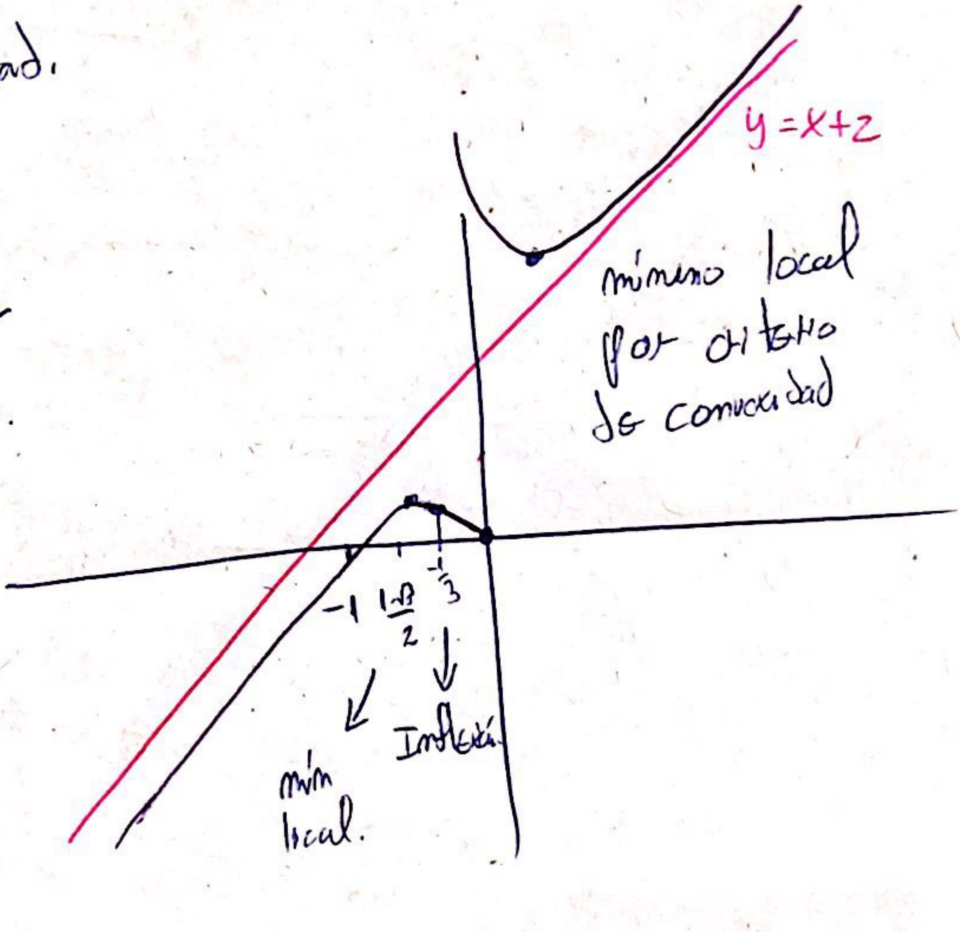
Convexidad.

\# Verificar

$$f''(x) = e^{1/x}\left[\frac{3x+1}{x^4}\right]$$ Ahora debo ver sus signos.

tenemos que $e^{1/x}$ y x^4 son positivos, por lo que el signo depende de $3x+1$ el cual es una función creciente con su cambio de signo en $-\frac{1}{3}=x$; por lo que allí es un punto de inflexión donde cambia la concavidad.

	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	∞
$3x+1$	$-$		$+$
	concava		convexa.



Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl