MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar Extra C2: Integración

P1. *a)* **Integral Definida**

Para f una función impar y continua, calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + f(\frac{1}{4} - \sin(x))}{\sec(x)} dx$$

b) **Sumas de Riemann**

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (ln(n+i) - ln(n))$$

c) **Teorema Fundamental del Cálculo**

Determine la función continua f y el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación:

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$$

d) **L'Hopital y Regla de Leibniz**

Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{u^2} du}{\displaystyle\int_0^{x} \sin(u^2) du}$$

e) **TVM Integral**

Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(\frac{x}{n}) g(x) dx = 0$$

P2. *a)* Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x) dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2$

b) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

Indicación: Le puede ser útil pensar en sumas de Riemann.

c) Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

d) Considere la función definida por la regla

$$g(x) = sen(x)\int_0^x f(t)cos(s)dt - cos(x)\int_0^x f(t)sen(t)dt$$

Donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto demuestre que si $f(0) > 0$ entonces g tiene un mínimo local en g.

e) Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i),\ \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!,\ \forall n \geq 1$$

f) Demuestre que $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}sen(x)}{1+x^2}dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$