MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez

Auxiliar 12: Aplicaciones de la Integral II

15 de noviembre de 2021

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene que la longitud de la curva f entre a y b, esta dada por la fórmula:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b es:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- **Área en coordenadas polares:** Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta$$

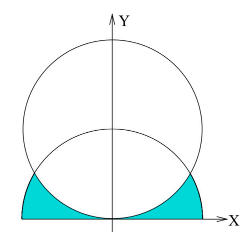
- **Centro de gravedad:** Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$

  El centro de gravedad de R esta dado por

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

P1. *a)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

a) $r = 2$

b) $r^2 - r - 12 = 0$

c) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

d) $r = \dfrac{\theta}{2\pi}$

e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r = 2cos(\theta)$

g) $r = sen(2\theta)$

h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

P3. *a)* Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = sen(2\theta)$.

b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1 + cos(\theta)$

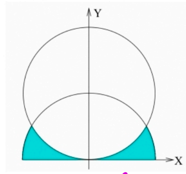
P4. Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \quad \text{y} \quad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

P1. *a)* Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2+2x-f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r>0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2,\ x^2+y^2-2ry\ge 0,\ y\ge 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

a) Tengo condición inicial $f(0)=0$ ✱

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx$$

Nuestra misión despejar $f(x)$

La longitud de 0 a x

$= x^2+2x-f(x)$

Aplicando la fórmula

$$L_0^x(f) = \int_0^x \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = x^2+2x-f(x) \quad /(\ )'$$

Lo que usaremos
$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx\right)' = f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\,u'(x)$$

$$\int_0^x \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = x^2+2x-f(x) \quad /(\ )'$$

$$\sqrt{1+|f'(x)|^2}\cdot\underbrace{(x)'}_{1} - \underbrace{\sqrt{1+|f'(x)|^2}\cdot 0'}_{0} = 2x+2-f'(x)$$

$$\sqrt{1+|f'(x)|^2} = (2x+2-f'(x)) \quad /(\ )^2$$

$$1+\cancel{|f'(x)|^2} = 4x^2+4+\cancel{f'(x)^2}+8x-4(f'(x)+f'(x)x)$$

$$f'(x)[4(1+x)] = 4x^2+3+8x$$

$$f'(x)[4(1+x)] = 4x^2 + 3 + 8x$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 3 + 8x}{4x+4} = \frac{4x+4 + 4x + 4 + 4x^2 - 5}{4x+4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{4x^2 + 4x - 1}{4x+4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\cancel{4}x\cancel{(x+1)}}{\cancel{4}\cancel{(x+1)}} - \frac{1}{4(x+1)}$$

$$f'(x) = 1 + x - \frac{1}{4(x+1)} \quad \int$$

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C}$$

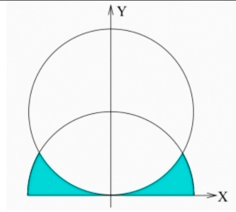
$*$ $f(0) = 0$

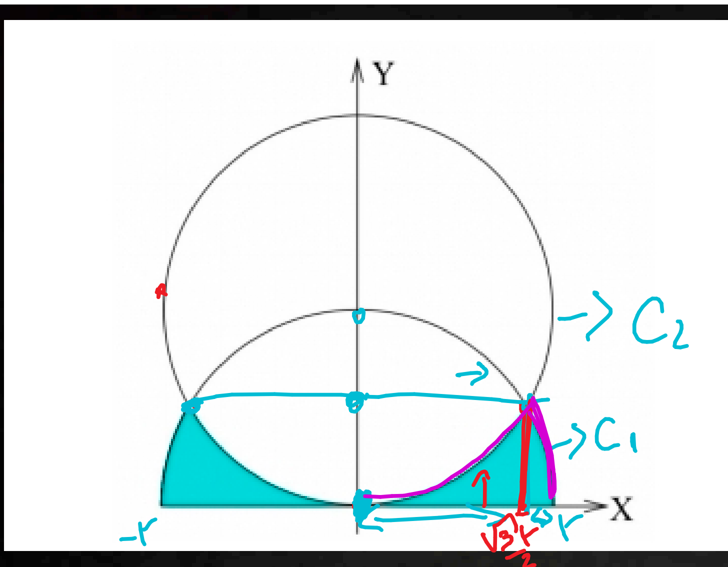
$$0 = 0 + \frac{0^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(0+1) + C$$

$$C = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(x+1)$$

b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2,\ x^2+y^2-2ry \ge 0,\ y \ge 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.





$\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$

$C_1 \quad x^2+y^2 \le r^2$

$C_2 \quad x^2+y^2-2ry \ge 0 \quad / +r^2$

$x^2+y^2-2ry+r^2 \ge r^2$

$x^2+(y-r)^2 \ge r^2$

$x^2+(y-r)^2 = x^2+((-1)(r-y))^2$

$x^2+(r-y)^2$

$x^2+y_1^2 = r^2$

$y_1 = \pm\sqrt{r^2-x^2}$

Curva 1

$x^2+(y_2-r)^2 = r^2$

$y_2 = \pm\sqrt{r^2-x^2}+r$

Curva 2

$$\cancel{\sqrt{r^2-x^2}} = \cancel{\sqrt{r^2-x^2}} + r$$

$$\boxed{r=0}$$

Este caso no me sirve

luego intento $\sqrt{r^2-x^2} = -\sqrt{r^2-x^2} + r$

$$\sqrt{r^2-x^2} = \frac{r}{2} \quad / (\,)^2$$

$$r^2 - x^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{4r^2}{4} - \frac{r^4}{4} = x^2 \Rightarrow \frac{3r^2}{4} = x^2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$S_{ox}(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad *$$

$$S_{ox} = 2\Big[\underbrace{2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}r}{2}} \underbrace{\left(r - \sqrt{r^2-x^2}\right)}_{f(x)} \left(\underbrace{\sqrt{1+\left(\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}}_{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) dx}_{I_1}$$

$$\underbrace{+\, 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}r}{2}}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)\left(\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}\right) dx}_{I_2}\Big]$$

$I_1)$ $\left(r - \sqrt{r^2-x^2}\right)' = -\dfrac{1-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

lo que tengo $\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{r^2-x^2}{r^2-x^2} + \frac{x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}$$

I.1

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \left(r - \sqrt{r^2 - x^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}} - r\,dx$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} - \underbrace{r\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} dx}$$

$$\mathrm{sen}(\mathrm{sen}^{-1}(x)) = x \quad /()'$$

$$\cos(\mathrm{sen}^{-1}(x))\,\mathrm{sen}^{-1}(x)' = 1$$

$$\mathrm{sen}^{-1}(x)' = \frac{1}{\cos(\mathrm{sen}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c^2 + s^2 = 1$$

$$c(\alpha) = \sqrt{1 - s^2(\alpha)}$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx - \frac{\sqrt{3}\,r^2}{2}$$

$$= r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 = r^2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin(0)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

$$= r^2\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 = I_1$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\underbrace{\left(\sqrt{1+\left|\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right|^2}\right)}\,dx = I_2$$

$$\# \quad \sqrt{1+\left|\frac{1\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}\right|^2} = \sqrt{\frac{r^2\cancel{-x^2}}{r^2-x^2}+\frac{\cancel{x^2}}{r^2-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\,\frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\,dx = r\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} dx = r\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$= r^2-\frac{\sqrt{3}r^2}{2} = I_1$$

$$S_{ox} = 2\left[2\pi I_1 + 2\pi I_2\right]$$

$$= 2\Big[2\pi \quad r^2\frac{\pi}{6} - 2\pi\frac{r^2\sqrt{3}}{2} + 2\pi r^2 - 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

$$= 4\pi r^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$$

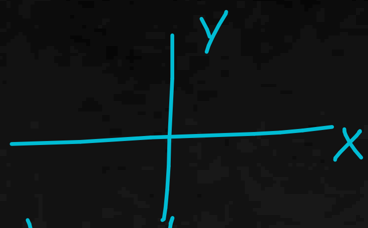
P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

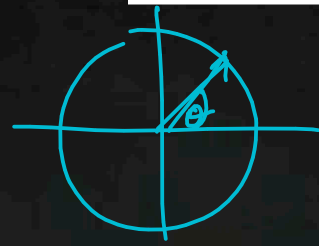
a) $r = 2$	c) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$	e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$	g) $r = sen(2\theta)$
b) $r^2 - r - 12 = 0$	d) $r = \dfrac{\theta}{2\pi}$	f) $r = 2cos(\theta)$	h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1) $X = r\cos(\theta)$

2) $y = r\,sen(\theta)$





$\dfrac{2)}{1)} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = tg(\theta)$

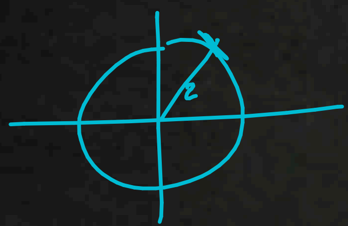
$\boxed{arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta}$

$r = \dfrac{x}{\cos(\theta)}$; $r = \dfrac{y}{sen(\theta)}$

Coordenadas polares

---

a) $r = 2$

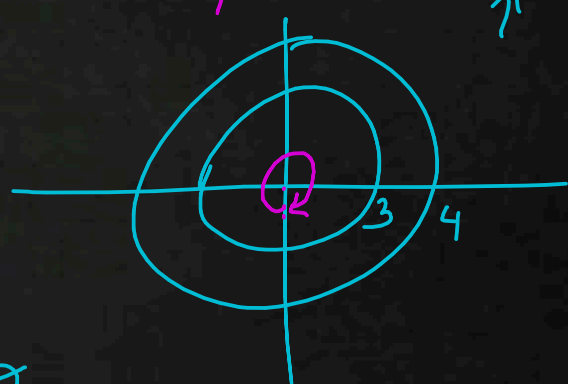


b) $r^2 - r - 12 = 0$

$(r+3)(r-4) = 0$

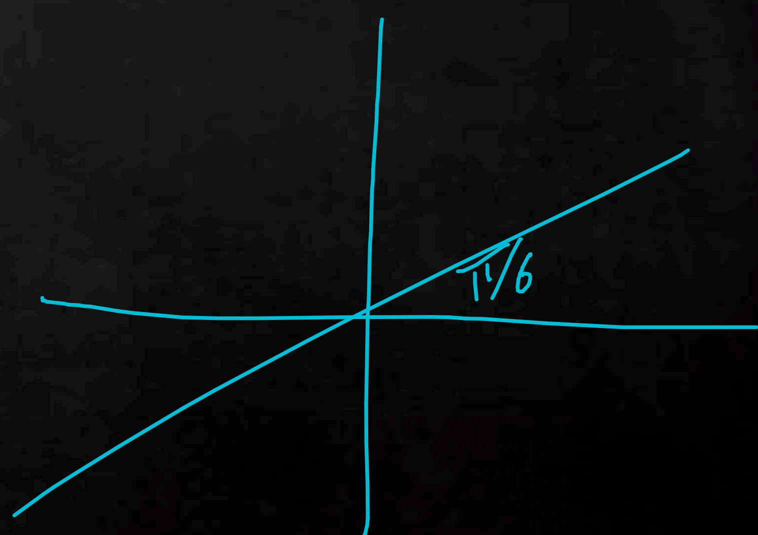
$r + 3 = 0 \lor r - 4 = 0$

$r = -3 \quad \lor r = 4$



c) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

r	θ
-1	$\frac{\pi}{6}$
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{6}$

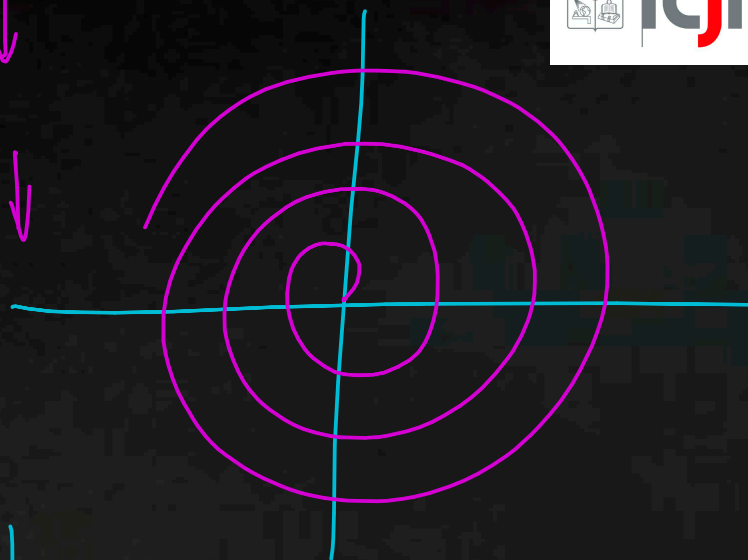


$r = \dfrac{\theta}{2\pi}$

$\uparrow \quad \uparrow$

r	θ
0	0
1	2π
2	4π
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	π

$r = r(\theta)$



e) $r = \tan(\theta)\sec(\theta)$

$$r = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)} = r$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = r\cos^2(\theta) \quad / \cdot r$$

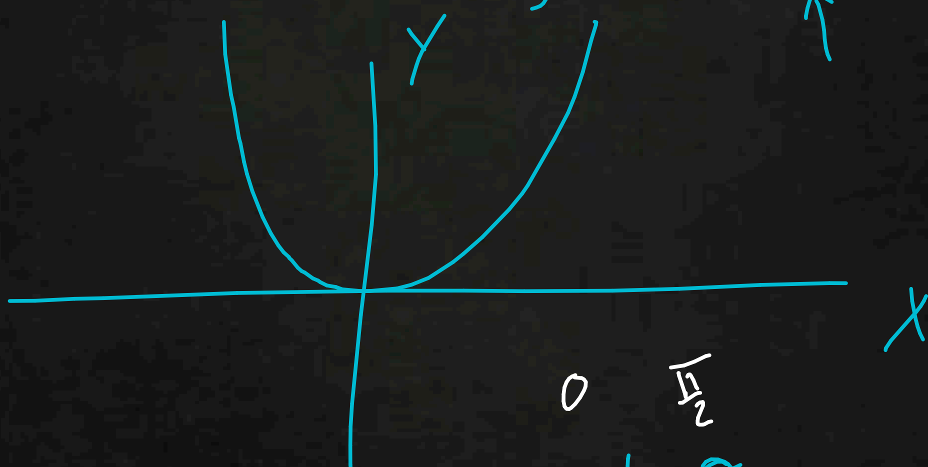
$$\underbrace{r\operatorname{sen}(\theta)}_{y} = \underbrace{r^2\cos^2(\theta)}_{x^2}$$

$$y = x^2$$

$\uparrow$

$x = r\cos(\theta)$

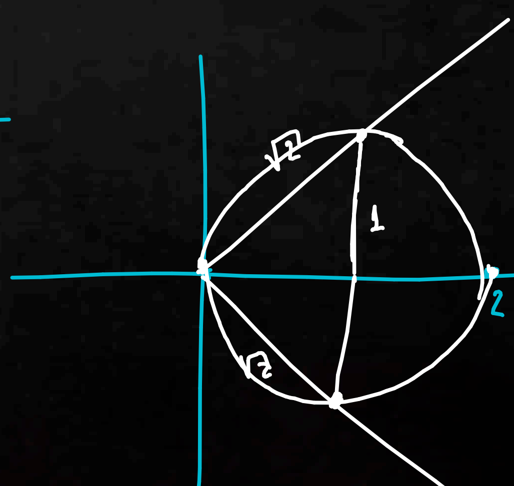
$y = r\operatorname{sen}(\theta)$



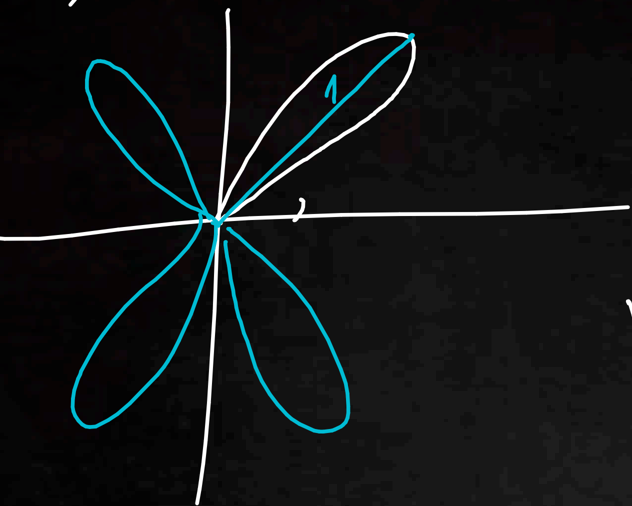
f) $r = 2\cos(\theta)$

$0 \quad \frac{\pi}{2}$

r	θ
2	0
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-2	π
1	$-\frac{\pi}{3}$

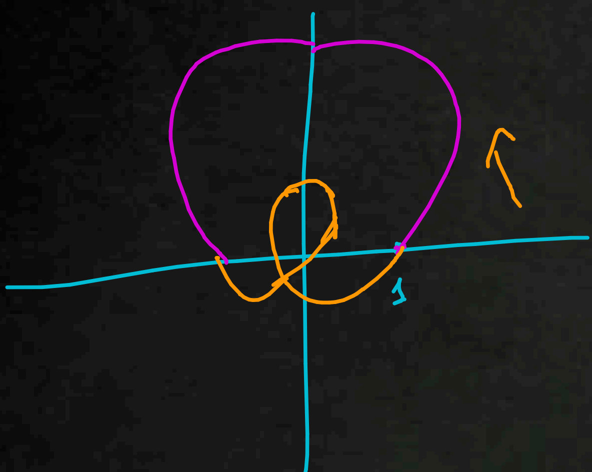


g) $r = \text{sen}(2\theta)$



r	θ
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$

h) $r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta)$



r	θ
1	0
2	$\frac{\pi}{6}$
$2{,}41 \approx 1+\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$2{,}73 \approx 1+\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\frac{\pi}{2}$

$\text{sen}(\theta) \approx \theta$

$r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta)$

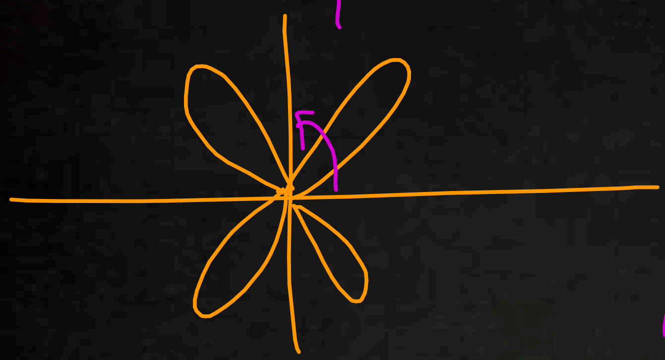
$r \approx 1 - 2\theta$

r	θ
0	$-\frac{\pi}{6}$
$-0{,}41 \approx 1-\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-0{,}73 \approx 1-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$

P3)

$$A = \frac{1}{2}\int f^2(\theta)\,d\theta$$

a) $\rho(\theta) = \text{sen}(2\theta)$



$$A = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(2\theta)\,d\theta\right)$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(4\theta)}{2}\right)d\theta$$

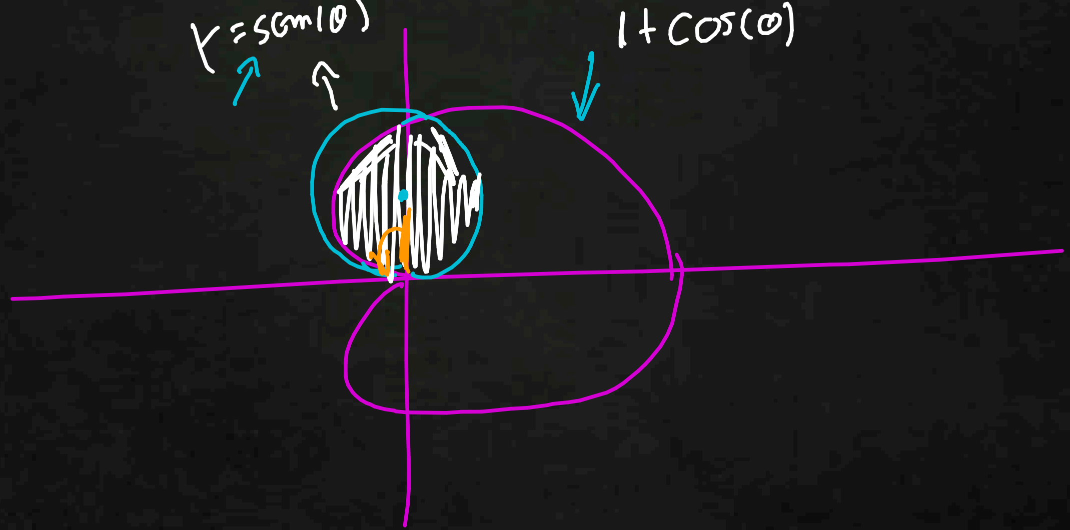
$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\,\text{sen}(4\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot 0 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$s^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$c^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

b)



$$A' = \quad + \quad = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4} + $$

media circunferencia

cardiode

$$= \frac{1}{2}\int \rho(\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos(\theta))^2 \, d\theta$$

$$c^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 + 2\cos(\theta) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + 2\left(\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{(\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{8} - 1$$

$$\Rightarrow A_T = D + ($$

$$= \frac{3\pi}{8} - 1 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

P4) $A = \int_a^b f(x)\,dx$

$2\pi A \cdot X_G$

$$2\pi \cancel{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\cancel{\int_a^b f(x)\,dx}} = 2\pi \int_a^b x f(x) = V_{oy}$$

$$2\pi A Y_G = 2\pi \cancel{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx}{\cancel{\int_a^b f(x)\,dx}}$$

$$= \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = V_{ox}$$

Propuestos[Sección alterna]

1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ y la parábola de ecuación $y=(x-2)^2$.

   a) **Área**
   Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

   b) **Volumen de Revolución**
   Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.

2. Considere la función $f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

   a) **Longitud de Curva**
   Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

   b) **Área del Manto de Revolución**
   Se define la región $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], 0\leq y\leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

   c) **Centro de Gravedad**
   Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

"The air was cold. Taylor"

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 12: Aplicaciones de la Integral

Fecha: 15/11/21

P1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ y la parábola de ecuación $y = (x-2)^2$.

a) **Área**
Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

b) **Volumen de Revolución**
Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.

P2. Considere la función $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) **Longitud de Curva**
Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

b) **Área del Manto de Revolución**
Se define la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

c) **Centro de Gravedad**
Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

Propuestos (Ver Auxiliar Pato Sección 1)

P3. *a)* Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$ Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.

P4. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

a) $r = 2$

b) $r^2 - r - 12 = 0$

c) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

d) $r = \dfrac{\theta}{2\pi}$

e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r = 2cos(\theta)$

g) $r = sen(2\theta)$

h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

P5. *a)* Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = sen(2\theta)$.

b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1 + cos(\theta)$

P6. Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

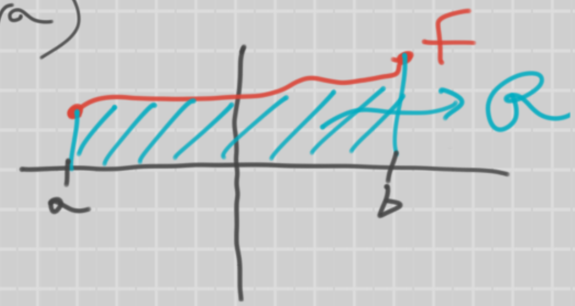
$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \quad \text{y} \quad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

Área de una región en el Plano

Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $R = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ y\in[0,f(x)]\}$

$$\Rightarrow \text{Área}(R) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(área bajo la curva)}$$

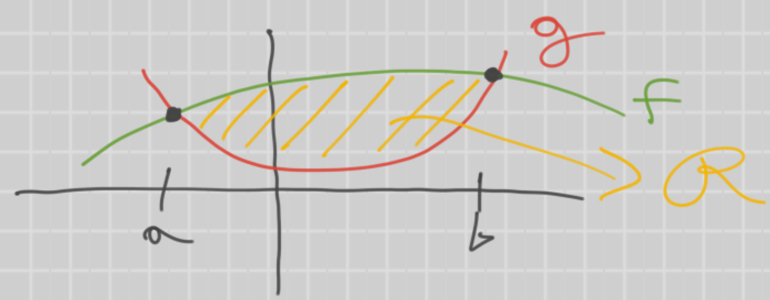


Área si $f \geq g \geq 0$ en $[a,b]$

y $R = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ y\in[g(x),f(x)]\}$

$$= \underbrace{\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ y\in[0,f(x)]\}}_{R_1} \setminus \underbrace{\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ y\in[0,g(x)]\}}_{R_2}$$

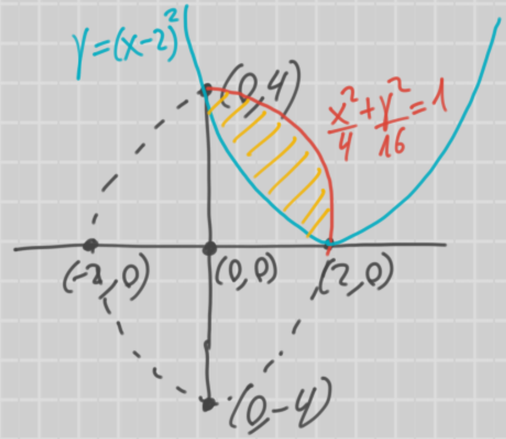
$$\Rightarrow \text{Área}(R) = \text{Área}(R_1) - \text{Área}(R_2)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



P1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ y la parábola de ecuación $y = (x-2)^2$.

a) **Área**
Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

b) **Volumen de Revolución**
Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.



a) El primer paso es definir las curvas que delimitan la región como funciones.

Para la curva de la elipse (roja):

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \underset{\cdot 16}{\iff} y^2 = 4(4-x^2) \underset{y\geq 0}{\iff} y = 2\sqrt{4-x^2} =: f(x)$$

(estamos en el 1er cuadrante) $\qquad x\in[0,2]$

Para la curva de la parábola (celeste):

$$y=(x-2)^2 = g(x) \quad (x\in[0,2])$$

Para $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ y\in[g(x),f(x)]\}$.

Notar que $f\geq g\geq 0$ en $[0,2]$, por lo tanto:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx = \underbrace{2\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx}_{(1)} - \underbrace{\int_0^2 (x-2)^2}_{(2)}$$

$$\overset{(*)}{=} 2\pi - \frac{8}{3} \blacksquare$$

(*)

$$(1) \underset{\text{C.V.}}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\underbrace{(1-\sin^2 t)}_{\cos^2 t}}\, 2\cos t\,dt$$

C.V.: $\left(\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x=0\to t=0 \\ x=2\to t=\pi/2 \end{array}\right)$

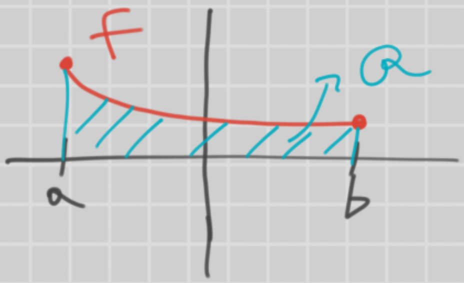
$$= 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= 2\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \pi.$$

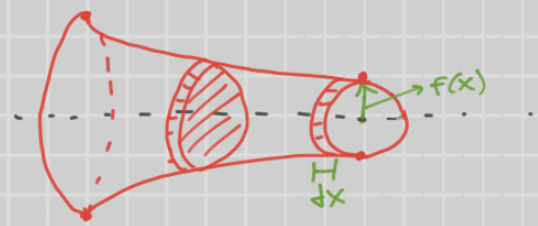
$$(2) = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{x=0}^{2} = \frac{8}{3}$$

Volumen de Revolución en torno al eje OX

Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}$



rotando R en torno a eje OX



Dividimos la región generada en discos de ancho dx (muy pequeño) y radio $f(x)$, i.e. el volumen de cada disco (cilindro) es

$$V(x) = \pi \underbrace{f(x)^2}_{\text{radio}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{altura}}$$

$$\Longrightarrow V_{OX}(R) = \int_a^b V(x)\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

Igual que antes, si ahora tenemos $f \geq g \geq 0$ en $[a,b]$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y \in [g(x), f(x)]\}$:

$$\Longrightarrow V_{OX}(R) = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$$

<u>Obs</u>: $V_{OY}(R) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$ (rotación c/r a eje OY)

P1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ y la parábola de ecuación $y = (x-2)^2$.

a) **Área**
Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

b) **Volumen de Revolución**
Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.

b) $f(x) = 2\sqrt{4-x^2}, \ x \in [0,2]$

$g(x) = (x-2)^2, \ x \in [0,2]$

$f \geq g \geq 0$ en $[0,2]$:

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], \ y \in [g(x), f(x)]\}$.

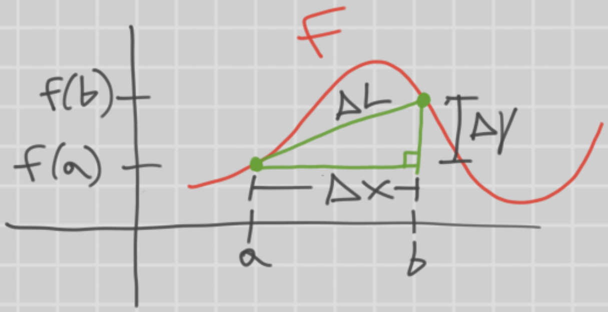
$$\Rightarrow V_{ox}(R) = \pi \int_0^2 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(4(4-x^2) - (x-2)^4\right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(16 - 4x^2 - (x-2)^4\right) dx = \pi \left[16x - 4\frac{x^3}{3} - \frac{(x-2)^5}{5}\right]_{x=0}^{2}$$

$$= \pi \left[32 - \frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right] = 32\pi \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = 32\pi \cdot \frac{7}{15}$$

Longitud de Arco



ΔL me aproxima el largo de la curva.

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

y representa F

$$\Rightarrow \frac{dL}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \stackrel{\nearrow}{=} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

entre más chico Δx (más cerca esté b de a), más precisa es la aprox. de ΔL del pedacito pequeño de curva

$$\underset{\int_a^b dx}{\Longrightarrow} \boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

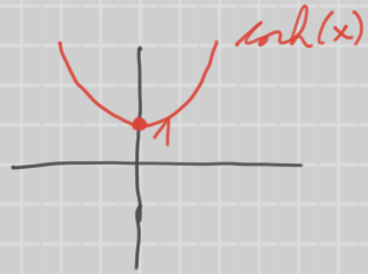
largo de la curva descrita por F en [a, b].

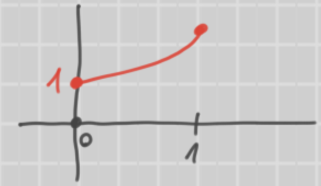
P2. Considere la función $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) **Longitud de Curva**
Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

b) **Área del Manto de Revolución**
Se define la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

c) **Centro de Gravedad**
Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.





a) $L_{[0,1]}(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad (\#)$

$\cdot\ f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cdot\ f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\Rightarrow (\#) = \int_0^1 \sqrt{\underbrace{1 + \sinh^2(x)}_{= \cosh^2(x)}}\, dx = \int_0^1 \cosh(x)\, dx$$

$$= \sinh(x)\Big|_0^1 = \sinh(1) - \cancel{\sinh(0)}^{\to 0}$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$$

Área del Manto de Revolución respecto al eje OX

Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}$.

$$\Rightarrow A_{OX}(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

P2. Considere la función $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) **Longitud de Curva**
Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

b) **Área del Manto de Revolución**
Se define la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

c) **Centro de Gravedad**
Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

b) $$S_{OX}(\Omega) = 2\pi \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{\cosh(x)} \underbrace{\sqrt{1+f'(x)^2}}_{\cosh(x)\text{ (visto en a))}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1+\cosh(2x)}{2}\,dx = \pi\left[x + \frac{\sinh(2x)}{2}\right]_{x=0}^{1} = \pi\left[1 + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2}\right]$$

Coordenadas Centro de Gravedad

En el pto de equilibrio del sistema c/r a posibles rotaciones:

Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \quad y_G = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

P2. Considere la función $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) **Longitud de Curva**
Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

b) **Área del Manto de Revolución**
Se define la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

c) **Centro de Gravedad**
Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

c) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \cosh(x)\,dx = [\sinh(x)]_{x=0}^{1} = \sinh(1) - \cancel{\sinh(0)}^{\,0}$

$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$.

$\bullet \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\cosh(x)\,dx}_{dv} = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,du$ $\qquad \cosh(1)$

$= x\sinh(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sinh(x)\,dx = \sinh(1) - \cosh(x)\Big|_0^1 = \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(0)$

$= \cancel{\frac{e}{2}} - \frac{1}{2e} - \cancel{\frac{e}{2}} - \frac{1}{2e} + 1$

$= 1 - \frac{1}{e}.$

$\bullet \int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8e^2}$

calcolato in b)

$$\therefore\ x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}}$$

$$y_G = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8e^2}}{\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}} \quad \blacksquare$$