MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 13: Integrales Impropias

22 de noviembre de 2021

Recuerdo:

- **Primera Especie:** Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple:
  1. $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$.
  2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ existe.

  En caso de que lo anterior exista denotaremos $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$.
- Si el límite anterior existe diremos que la integral impropia es convergente y si no diremos que es divergente.
- De manera análoga se define $\int_{-\infty}^b$ y
$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{\infty}$$
  Donde para que la integral de la izquierda converja deben converger las de la izquierda.
- Dado $a > 0$. Luego $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$ converge si y sólo si $s > 1$.
- **Segunda Especie:** Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si se cumple:
  1. $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$.
  2. $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.

  En caso de que lo anterior exista denotaremos $\displaystyle\int_a^{b} f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$.
- Dado $a < b$. Luego $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$ converge si y sólo si $s < 1$.
- **Mixtas:** Estas integrales convergen si cada una de las integrales en las que se separan (de primera o segunda especie converge)
- **Criterio de Convergencia 1:**

  Sean g, f continuas tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ a partir de $x_0 \geq a$. Luego si $\int_a^\infty g$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge, de manera recíproca si $\int_a^\infty f$ diverge $\int_a^\infty g$ también.
- **Criterio de Convergencia 2:**

  Sean f, g continuas tal que:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$
  Luego si $\int_a^\infty g$ y $\int_a^\infty f$ convergen o divergen juntas.

  Obs: Los criterios de convergencia anteriores sirven también para integrales de segunda especie, reemplazando ∞ por b^-.
- Diremos que $\int_a^\infty f$ es absolutamente convergente si $\int_a^\infty |f|$ converge.
- Si $\int_a^\infty |f|$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge.

P1. Estudiar
$$\int_{-n}^{n} \frac{1+x}{1+x^2}dx \underbrace{=}_{?} \int_{--\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

P2. Calcule, el siguiente límite.
$$\lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$$

P3. Estudie mediante los métodos vistos si converge o no $\int_0^{\infty} \frac{arctan(x)}{x^{3/2}} dx$

P4. Determine si las siguientes integrales son o no convergentes.[Propuesto]

a) $\displaystyle\int_0^1 ln(x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{xln^p(x)} \quad ,p>0$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{arctan(x)}{x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(2x)}{x^{3/2}}dx$

f) $\int_0^\infty e^{-x}sen(x)dx$