MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 14: Extra C3

Fecha: 25/11/21

P1. Integrales Impropias

a) **Tercera Especie**
Considere la integral impropia mixta:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x + \sqrt{x + x^3}}$$

1) Separe la integral como la suma de dos integrales I_1, I_2 en los intervalos $(0, 1]$ y $[1, \infty]$, respectivamente, y pruebe que cada una converge.
2) Haga el cambio de variables $u = \frac{1}{x}$ en alguna de las dos integrales y pruebe que ambas son iguales. Justifique la convergencia de I.

b) **Convergencia Absoluta**
Estudie la convergencia de:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

c) **Definición**

P2. Intro
Demuestre que $\lim\limits_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$, pero que sin embargo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ diverge.

a)

P3. Considere la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sqrt{2-x}$ y definamos la región

$$\mathcal{R} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le f(x)\right\}$$

a) Calcule $A(\mathcal{R})$, el área de la región $\mathcal{R}$
b) Calcule $V_{OX}(\mathcal{R})$, el volumen de revolución generado al rotar $\mathcal{R}$ con respecto al eje X
c) Calcule V_{OY}, el volumen de revolución generado al rotar $\mathcal{R}$ con respecto al eje Y

P4. Demuestre que para $a > 0$ se tiene que

$$\int_0^a x f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^2 \int_0^1 x f(x) dx$$

Use este resultado para calcular $\int_0^a x\left(\ln x - \ln a\right) dx$, con $a > 0$.

P5. Analice la convergencia de las siguientes integrales, usando las reglas de convergencia o criterios adecuados.

a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^{3/2}}dx$

P6. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, \infty)$ y definamos el conjunto

$$\mathcal{R} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, \infty), 0 \leq y \leq f(x)\Big\}$$

Pruebe que $A(\mathcal{R})$ existe y calcúlela, pruebe que $V_{OX}(\mathcal{R})$ existe y que $V_{OY}(\mathcal{R})$ **no** existe.