MA1002 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 1: EL REGRESO
Sucesión de sus sesiones de subsucesión

23 de Agosto

Recuerdo:

- Una **sucesión** es una función
$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$
- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces
$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si
$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$
- **Caracterización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$
$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$
- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.
- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$
- **[Teorema de Weierstras]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

P1. Calcule los siguientes limites, inserte hipótesis(ale):

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n!}}{(n!)!}$

b) $\lim_{n\to\infty} (2)^{n\cdot 2^{-n}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2}$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P2. Verifiquemos el valor de verdad
Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y con x_n una sucesión en $[a,b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)}$ y $x_1\in[a,b]$ tal que $f(x_{\phi(n)})\to f(x_1)$ con $n\to\infty$
PASOS PARA EL ÉXITO:

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P4. sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{ln(1+x)} & si \quad x>0 \\ (x-\alpha)^2 & si \quad x<0 \\ \beta & si \quad x=0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L>0,\ \forall x,y\in Dom(f),\ |f(x)-f(y)|\le L|x-y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

P6. Sea $S_n = arctg(n!\cdot e^n\cdot cos(n^2))$, el objetivo es probar que existe al menos una subsucesión convergente.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

Propuestos

P1. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,((1-a)x)}{x} & si \quad x < 0 \\ b(x-a)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{sen\,(a(x-1))}{ln(x)} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$?
2) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0
3) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1
4) Encuentre los valores de a y de b de tal forma que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

P2. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es continua y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ entonces toda sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ posee al menos una subsucesión $(x_\varphi(n))$ tal que $g(x_\varphi(n))$ converge
Ind: Pruebe previamente que g es acotada y aplique apropiadamente Bolzano-Weierstrass

P3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ell$

P4. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\overline{x}$ y que satisface $\lim\limits_{x\to\pm} f(x) = +\infty$
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{n}$$

1) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \overline{x}$
2) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\overline{x}$

Auxiliar 1: EL REGRESO

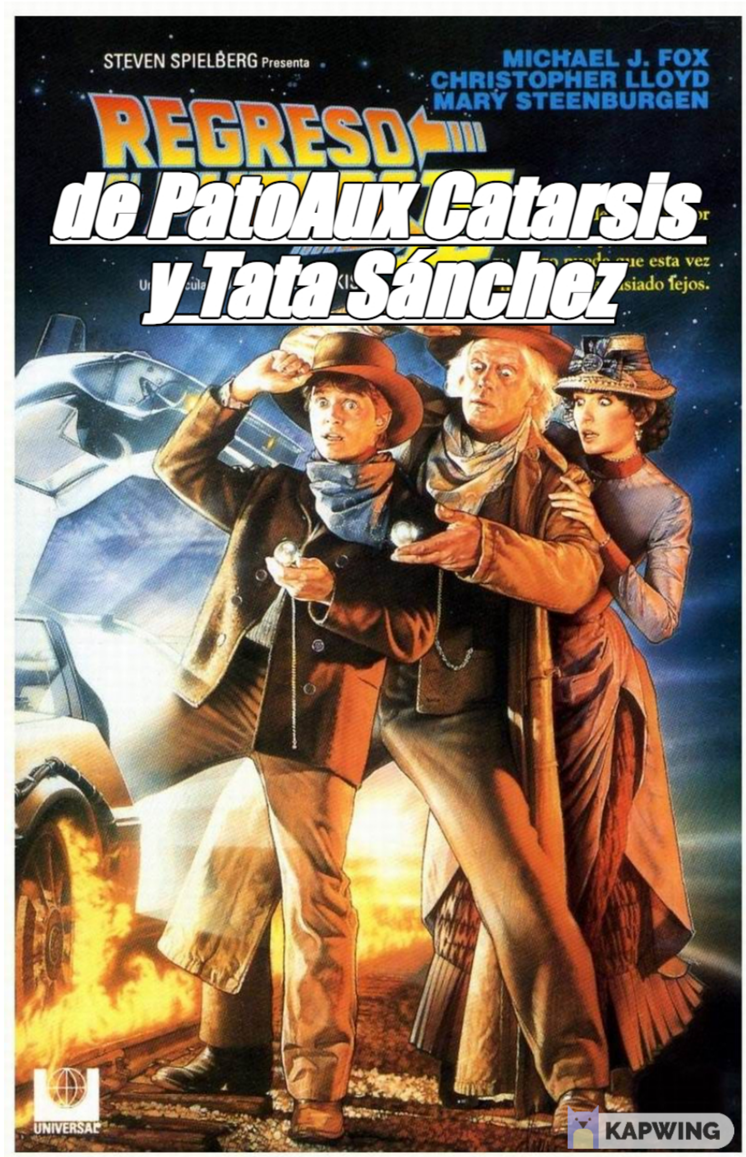

Figura 1: Será memorable

"-Ey, doc, es mejor que nos retractemos. No tenemos suficiente carretera para llegar a los 140 kilómetros por hora. -Marty.
-¿Carreteras? A donde vamos no necesitamos carreteras. -Dr. Emmet."
Volver al futuro