MA1002 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 1: EL REGRESO
Sucesión de sus sesiones de subsucesión

23 de Agosto

Recuerdo:

- Una **sucesión** es una función

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$

- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$

- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$

- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \implies f(x_n) \to f(\overline{x})$$

- **Caracterización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$

- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$

- **[Teorema de Weierstras]**
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

P1. Calcule los siguientes limites, inserte hipótesis(ale):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n!}}{(n!)!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2)^{n\cdot 2^{-n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2}$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P2. Verifiquemos el valor de verdad
Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y con x_n una sucesión en $[a,b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)}$ y $x_1\in[a,b]$ tal que $f(x_{\phi(n)})\to f(x_1)$ con $n\to\infty$
PASOS PARA EL ÉXITO:

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

b) $v_n = \left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P4. sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{ln(1+x)} & si \quad x>0\\ (x-\alpha)^2 & si \quad x<0\\ \beta & si \quad x=0\end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L>0,\ \forall x,y\in Dom(f),\ |f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

P6. Sea $S_n = arctg(n!\cdot e^n\cdot cos(n^2))$, el objetivo es probar que existe al menos una subsucesión convergente.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:

Propuestos

Recuerdo:

- Una **sucesión** es una función
$$s:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto s(n)=s_n$$
- $s_n\to\ell \iff \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\ge n_0,|s_n-\ell|\le\varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N},|s_n|\le M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi:N\to N$ una función estrictamente creciente. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell\in\mathbb{R}$. Entonces
$$s_n\to\ell\iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weiestrass** Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente
- **Función continua en un punto** Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\bar{x}\in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\bar x$ si
$$\forall (x_n)\subseteq A, x_n\to\bar x \implies f(x_n)\to f(\bar x)$$
- **Caracterización $\varepsilon-\delta$** Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\bar x\in A$. f es continua

$s_n\to\ell \iff \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\ge n_0, |s_n-\ell|<\varepsilon$

$a< s_n < b$

$M:=\max\{|b|,|a|\}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

en $\bar x$ si y solo si se cumple que $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in A$

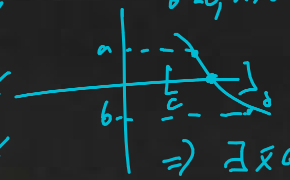
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$

$$\{|x-\bar x|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(\bar x)|\le\varepsilon\}$$

$p \Rightarrow q$

- **Álgebra de funciones continuas** Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas en $\bar x\in A\cap B$. Luego $f\pm g,\lambda f$ con $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\bar x)\neq0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si f es continua $\forall\bar x\in A$, diremos que f es continua.
- [TVI o Bolzano] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b)\le0$. Entonces existe $\bar x\in[a,b]$ tal que $f(\bar x)=0$.
- [TVI-Generalizado] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si $c,d\in f([a,b])$. Entonces $\forall x_0\in[c,d],\exists\bar x\in[a,b]$ tal que $f(\bar x)=x_0$
- [Teorema de Weierstras] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.
- Sea $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J=f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}:J\to I$ es continua.

$b<0,\ a>0$



$\Rightarrow \exists\bar x\in[c,d]$ tq $f(\bar x)=0$

P1. Calcule los siguientes limites, inserte hipótesis(ale):

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n!}}{(n!)!}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2)^{n\cdot2^{-n}}$

asuma límite existente

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2}$

a) INTUICIÓN: Recordar $s_n\to\ell \iff$ Toda subsucesión $s_{\varphi(n)}\to\ell$

b) TEORÍA: →

c) MATRACA:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n!}}{(n!)!}$; Defino $\varphi(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$\varphi(n):=n!$

$\varphi(n)-\varphi(n+1)=n!-(n+1)!=n!(-n)<0$

$\Rightarrow \varphi(n)-\varphi(n+1)<0$

$\varphi(n)<\varphi(n+1) \Rightarrow$ estrictamente creciente

Defino $s_n=\dfrac{3^{n!}}{(n!)!}=\dfrac{3^{\varphi(n)}}{\varphi(n)!}=s_{\varphi(n)}$

Estudio $s_k=\dfrac{3^k}{k!}\to$ Teo sándwich

$0\le\dfrac{3^k}{k!}=\dfrac{3^k}{1\cdot2\cdots k}\le\dfrac{3^k}{1\cdot2\cdot3^{k-3}\cdot k}=\dfrac{3^3}{2\cdot k}\to 0$

$\Rightarrow s_n\to0$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n!}}{(n!)!}$

b) $\lim_{n\to\infty} (2)^{n\cdot 2^{-n}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

b) $\lim_{n\to\infty} 2^{n\cdot 2^{-n}}$

$= \lim_{n\to\infty} 2^{\left(n\cdot\frac{1}{2^n}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(2^n\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$f(n): \mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$f(n) = 2^n$ crecimiento ↓

$\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow f(n)$ creciente estricto, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow S_n = (2^n)^{\frac{1}{2^n}} = \left(f(n)\right)^{\frac{1}{f(n)}}$

$f(n): \mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$K^{\frac{1}{K}} = \sqrt[K]{K} \to 1$ # Teo sándwich.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (2^n)^{\frac{1}{2^n}} \to 1$ //

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2}$

El límite existe

$S_n \to l \iff$ TODA subsucesión $(S_n)_k \to l$

Se parece a la definición función exponencial $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

subsucesión → función estricta creciente en los índices.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{4n^2 (1)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{(3n^2+2)}\right]^{\frac{4n^2}{3n^2+2}}$

* $\alpha^\beta = \exp(\ln(\alpha^\beta)) = \exp(\beta(\ln(\alpha)))$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{(3n^2+2)}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{4}{3}$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{3n^2+2} = a_n$$

$$f(n) = 3n^2+2$$

$$f(n+1)-f(n) = 3(n+1)^2+\cancel{2}-3n^2-\cancel{2}$$

$$= \cancel{3n^2}+6n+3-\cancel{3n^2}$$

$$= 6n+3>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(n)$ es estricta creciente

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$

$X_7\ \ X_8\ \ X_9 \ldots X_{13}$

$$a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{3n^2+2}$$

$$a_{f(n)} = \lim_{f(n)\to\infty}\left(1+\frac{2}{f(n)}\right)^{f(n)}$$

$n=0 \to 2$

$n=1 \to 5$

$n=2 \to 13$

$n=3 \to 29$

$\vdots \quad \vdots$

$$\underbrace{f(n)}_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$(a_n)_k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{k}\right)^k = e^2 \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\beta} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{2}{3n^2+2}\right)^{3n^2+2}\right]}_{\to e^2}^{\frac{4n^2}{3n^2+2}\to\frac{4}{3}} = \left(e^2\right)^{4/3}$$

Acotada

P2. Verifiquemos el valor de verdad
Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y con x_n una sucesión en $[a,b]$, entonces existe una subsucesión $x_{\phi(n)}$ y $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_{\phi(n)}) \to f(x_1)$ con $n \to \infty$
PASOS PARA EL ÉXITO:

convergencia

Verificar Valor de Verdad

Si Es verdadero → Lo pruebo para todos

Si Es falso → Encuentro un contraejemplo

Si Es Verdadero → NO entrego un caso particular

1) Lógica (proposiciones y Cuantificadores → Ver conceptos
2) Ver que teorema se parece
3) Demostrar o Argumentar su valor de verdad.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

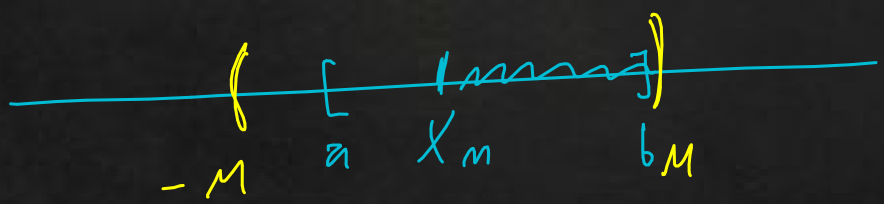
$x_n \in [a,b]$ sucesión $\qquad |x_n| \leq M$

$M = \max\{|a|, |b|\}$

$a \leq x_n \leq b \leq |b|$

$a \leq x_n \leq b$

$-M \leq x_n \leq M = \max\{|a|, |b|\}$



$\Rightarrow x_n \in [-M, M] \Rightarrow |x_n| \leq M \Rightarrow x_n$ acotado

Toda sucesión acotada posee al menos una subsucesión convergente

$\Rightarrow \exists\, x_{\phi(n)} \to \bar{x},\ \forall \bar{x} \in [a,b] \Rightarrow \bar{x} = x_1$

$\Rightarrow \exists\, x_{\varphi(m)} \to x_1$, # Recuerdo

$\Rightarrow f(x_{\varphi(m)}) \to f(x_1)$ // $\quad f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$\Leftrightarrow \quad x_n \to \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$

$\forall x_1 \in [a,b]$ //

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:
b) TEORÍA:
c) MATRACA:

$\underbrace{s_n \to l}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{\text{TODA subsucesión converge a } l}_{q}$

$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$s_n \to l \Rightarrow$ TODA subsucesión converge a l

Caracterización de la implicancia $\quad p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
$\Leftrightarrow q \vee \sim p$
$\Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$

$s_n \to l \Rightarrow$ TODA subsucesión converge a l

$\Leftrightarrow \exists$ subsucesión que <u>no</u> converge a $l \Rightarrow s_n \not\to l$

- diverger
- 2 subsucesión $s_{\varphi(m_1)} \to l_1$, $s_{\varphi(m_2)} \to l_2$ $\quad l_1 \neq l_2$

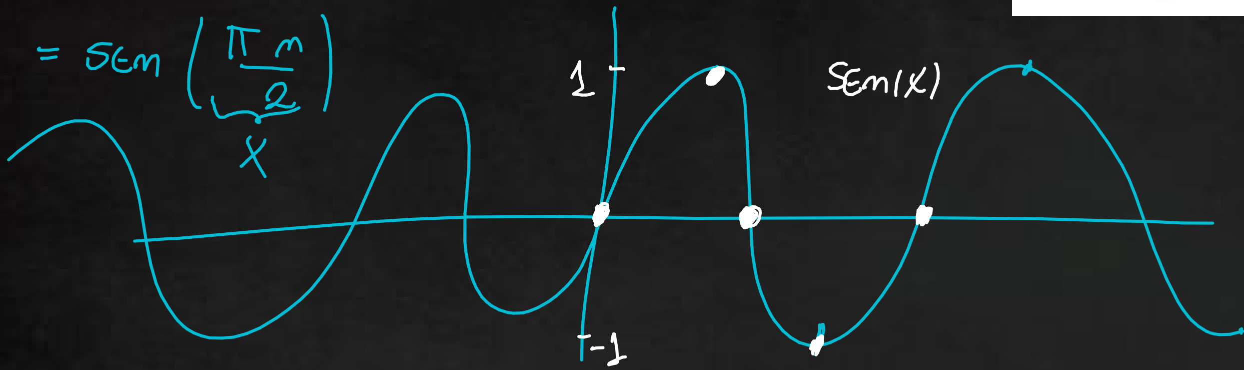
a)

P3. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ b) $v_n = \left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$

a) INTUICIÓN:

$$U_n = sen\left(\underbrace{\frac{\pi n}{2}}_{x}\right)$$



$n=0 \Rightarrow U_n = sen(0)$

$n=1 \Rightarrow U_n = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$n=2 \Rightarrow U_n = sen(\pi)$

$n=3 \Rightarrow U_n = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\vdots \qquad \vdots$

Sea $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow U_n = sen\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = sen(k\pi) = 0$$

Sea $n = 2k+1$

$$\Rightarrow U_n = sen\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

$\varphi(k_1) = 2k_1 \Rightarrow \varphi(k+1) - \varphi(k) = 2(k+1) - 2k = 2 > 0$

$\Rightarrow \varphi(k)$ <u>creciente estricto</u>

$\varphi(k_2) = 2k+1 \Rightarrow \varphi(k_2+1) - \varphi(k_2) = 2(k_2+1)+1 - (2k_2+1)$

$= 2 > 0 \Rightarrow \varphi(k_2)$ <u>creciente estricto</u>

$\varphi(k_1)$ subsucesión

$\varphi(k_2)$ subsucesión

donde $U_{\varphi(k_1)} \to l_1 = 0$

con $l_1 \neq l_2$

$U_{\varphi(k_2)} \to l_2 = (-1)^k$

$\therefore U_n$ no converge

b) $v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$V_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left((-1)\left[1 + \frac{-1}{n}\right]\right)^n = (-1)^n \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

$\varphi(n_1) = 2n_1$ creciente estricto

$$\Rightarrow V_{\varphi(n_1)} = \cancel{(-1)^{2n_1}}\left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1} = \left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1}$$

$$\lim_{n_1 \to \infty} V_{\varphi(n_1)} = \lim_{n_1 \to \infty} \left(1 + \frac{-1}{2n_1}\right)^{2n_1} = e^{-1} = l_1 \left(\frac{166}{\text{I.C.}}\right)$$

$\varphi(n_2) = 2n_2 + 1$ creciente estricto

$$\lim_{n_2 \to \infty} V_{\varphi(n_2)} = \lim_{n_2 \to \infty} \underbrace{(-1)^{2n_2+1}}_{-1} \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{(2n_2+1)}\right)^{(2n_2+1)}}_{\text{166 Def Exp}}$$

$$= -1 \cdot e^{-1} = l_2$$

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow V_n$ no converge.

P4. sea f la función definida por

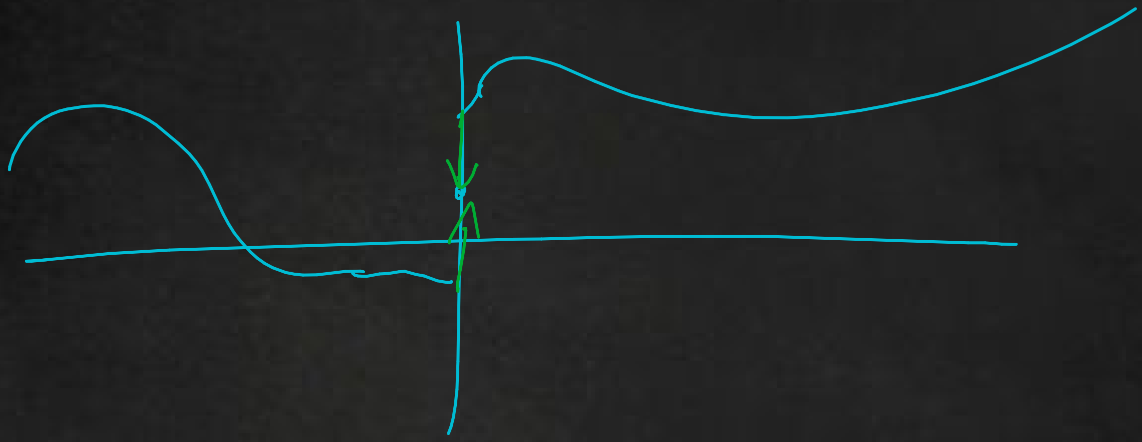
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{ln(1+x)} & si \quad x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & si \quad x < 0 \\ \beta & si \quad x = 0 \end{cases}$$

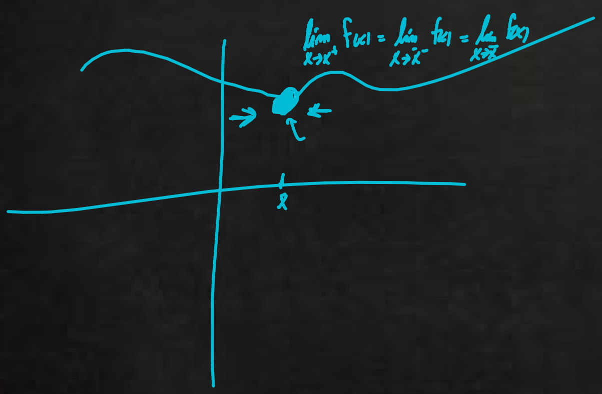
Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

a) INTUICIÓN:

b) TEORÍA:

c) MATRACA:





• Por álgebra y composición de funciones continuas será continua en su dominio a excepción del 0, ¿por qué?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

0

(1)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\beta = \lim_{x\to 0^-} (x-\alpha)^2$$

(*)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\beta = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$$

(♡)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (x-\alpha)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$$

$(e^x - 1)' = (e^x)' - \underbrace{(1)'}_{0}$
$= e^x$

L'Hôpital

$$(-\alpha)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{(x+1)} \cdot 1}$$

$$(\ln(h))' = \frac{1}{h}$$

$$(-\alpha)^2 = \frac{e^0}{\frac{1}{1+0}} = 1 \;//$$

$$(x+1)' = x' + (1)'$$
$$= 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{M.W.} \; \boxed{(-\alpha)^2 = 1} \qquad \Rightarrow \beta = 1$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

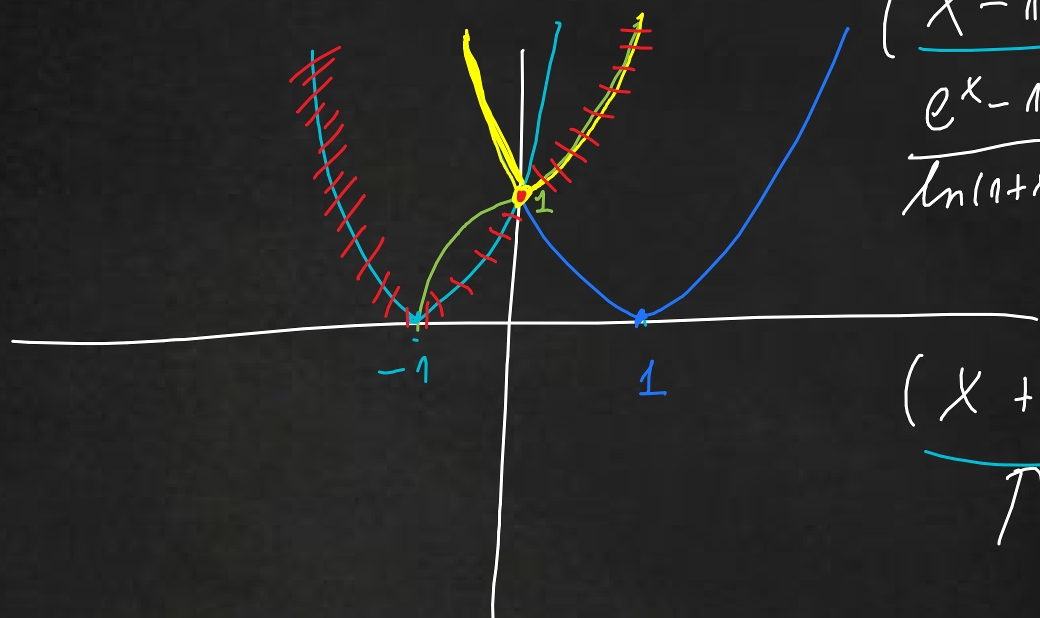
M.W

$$(-\alpha)^2 = 1$$

$$((-1)(\alpha))^2 = 1$$

$$\cancel{(-1)^2}^{\,1}(\alpha)^2 = 1$$

$$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$



↓

$\alpha = 1$

$$\frac{(x-1)^2}{}$$

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$$

$\alpha = -1$

$$\frac{(x+1)^2}{}$$

↑

P5. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua.

$p \Rightarrow q$

$x_n \to \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$ Nos sirve esta caracterización

ε-δ

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Leftrightarrow$ continua

Enunciado $\exists L \geq 0$ tq $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y$

1) $L = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 0 \cdot |x-y| = 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 0$; $|\cdot| \geq 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\forall x, y \in Dom(f) \Rightarrow f$ constante $\forall x, y \Rightarrow$ continua //

2) $L \neq 0$

$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ (1)

Queremos continuidad $\iff$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Defino $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, $\quad |x-y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$

$|x-y| < \dfrac{\varepsilon}{L}$ $\quad (*)$

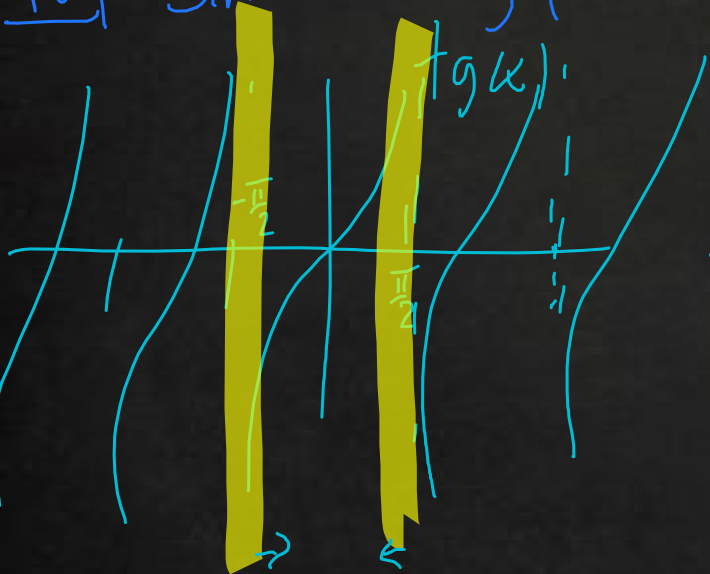
(1) $\quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

$\leq \cancel{L} \cdot \dfrac{\varepsilon}{\cancel{L}}$ $\quad , L > 0$

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

$\therefore$ f continua.

P6) $S_n = \operatorname{arctg}(n! \cdot e^n \cos(n^2))$



$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

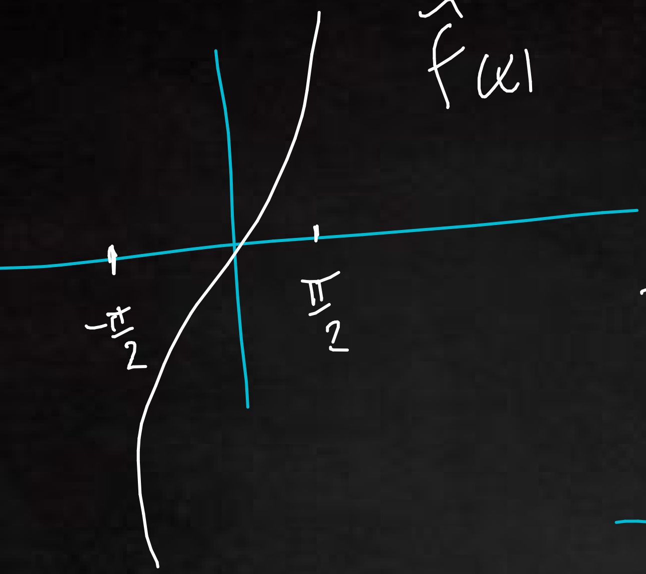
$\hat{f}(x) = tg(x)$

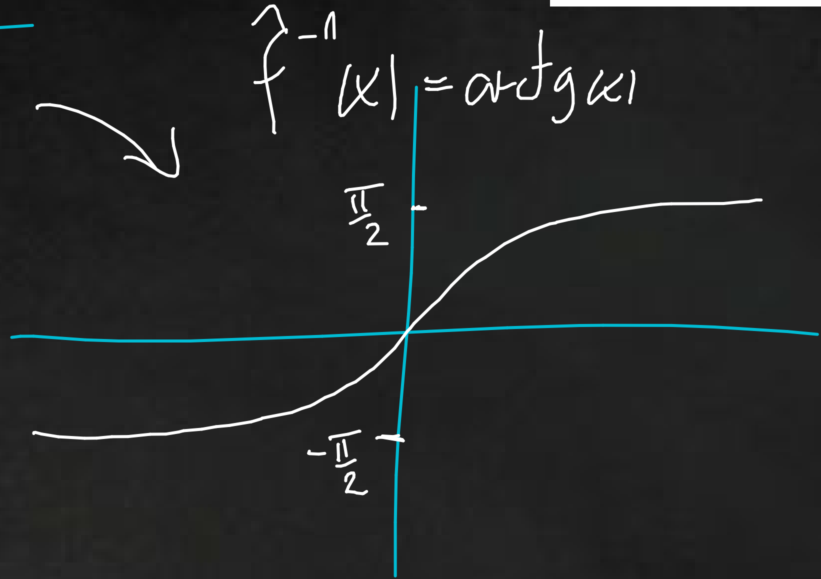
$\hat{f}(x): \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

Biyec $\iff$ inyectiva $\wedge$ sobreyectiva

$\operatorname{arctg}(x)$

$\hat{f}^{-1}(x): \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$





$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $x = n!\, e^n \cos(n^2) \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(n!\, e^n \cos(n^2)) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|\operatorname{arctg}(n!\, e^n \cos(n^2))|}_{|s_n| < M \Rightarrow s_n \text{ acotada}} < \frac{\pi}{2} = M$$

Si x_n acotada $\Rightarrow$ $\exists$ al menos una subsucesión convergente

$\Rightarrow \exists$ al menos una subsucesión convergente.
T.B-W

Espero que haya quedado todo claro!!!

Nos vemos en el próximo auxiliar!!

Cualquier duda

1) pyanez@dim.uchile.cl

2) Foro! Así tu duda sirve a los demás

3) Que tengan linda semana

PatoAux

P1. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,((1-a)x)}{x} & si \quad x < 0 \\ b(x-a)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{sen\,(a(x-1))}{ln(x)} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty, 0), (0,1), (1,\infty)$?
2) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0
3) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1
4) Encuentre los valores de a y de b de tal forma que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

P2. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ es continua y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ entonces toda sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ posee al menos una subsucesión $(x_\varphi(n))$ tal que $g(x_\varphi(n))$ converge
Ind: Pruebe previamente que g es acotada y aplique apropiadamente Bolzano-Weierstrass

P3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \ell$

P4. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\overline{x}$ y que satisface $\lim\limits_{x\to\pm} f(x) = +\infty$
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{n}$$

1) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \overline{x}$
2) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\overline{x}$

Auxiliar 1: EL REGRESO

Figura 1: Será memorable

"-Ey, doc, es mejor que nos retractemos. No tenemos suficiente carretera para llegar a los 140 kilómetros por hora. -Marty.
-¿Carreteras? A donde vamos no necesitamos carreteras. -Dr. Emmet."
Volver al futuro