P1| Derive las siguientes funciones.

Hola! Como van? :)

a) $\frac{\text{senh}(4x)}{\ln(x^2+1)}$, Primero vemos que debe ser por derivada de cociente,

Pero esto nos pide (0) $\ln(x^2+1) \neq 0$, y (1) debemos verificar que este bien definido

(0) $\ln(x^2+1) = 0$ / e^x

$$x^2+1 = e^0 = 1$$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, este valor debe ~~no~~ / no estar para que el denominador sea $\neq 0$

(1) Veamos que este bien definida,

Sea $\ln(\varepsilon) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, entonces $\varepsilon > 0$, veamos $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$x^2+1 > x^2 \geq 0$$

$\Rightarrow x^2+1 > 0$, $\varepsilon = x^2+1 > 0$ está bien definido.

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{\operatorname{senh}(4x)}{\ln(x^2+1)}\right)' = \frac{\cosh(4x)\cdot 4\ln(x^2+1) - \dfrac{\operatorname{senh}(4x)\cdot (x^2+1)'}{x^2+1}}{\left[\ln(x^2+1)\right]^2}$$

$$= \frac{\cosh(4x)\cdot 4\ln(x^2+1) - \dfrac{\operatorname{senh}(4x)}{x^2+1}\cdot 2x}{\left[\ln(x^2+1)\right]^2}$$

Hasta aquí basta!, ahora cuando deban usarla podrían extender el desarrollo y simplificar.

b) x^x , Aplicaremos 2 formas para este ejercicio.

forma 1 || Ocupar propiedad de consistencia (pág 188) introducción al cálculo, que dice esto?

"Sea $a \in \mathbb{R}$, $a = \ln(e^a) = \exp(\ln|a|)$

Sea $f(x) = x^x$

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = exp(\ln(x^x)$ Propiedad logaritmo!

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = exp\, x \ln(x)$

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = e^{x \ln(x)}$ $/ ()'$

$\Longleftrightarrow$ $f'(x) = e^{x \ln(x)}(x \ln(x))'$

$\Longleftrightarrow$ $f'(x) = e^{x \ln(x)}(\cancel{x} \ln(x) + x \cdot \frac{1}{\cancel{x}})$

ya lo probamos

$x \neq 0$

sólo por

puedo simplificar.

$\Longleftrightarrow$ $f'(x) = e^{x \ln(x)}(\ln(x) + 1)$

$\Longleftrightarrow$ $f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$ //

forma 2 | Operador logaritmico

Sea $y = x^x$ $/ \ln(x)$

$\Rightarrow$ $\ln(y) = \ln(x^x)$ /

$\Rightarrow$ $\ln(y) = x \ln(x)$ $/ ()'$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$

Recuerdo y en este caso es y(x), por lo que sería una derivada implícita y el rastro es y'

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(x) + 1$

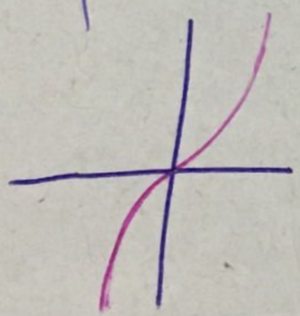
$\Leftrightarrow \quad y' = y(\ln(x) + 1)$; $y = x^x$

$\Leftrightarrow \quad y' = x^x(\ln(x) + 1)$ //

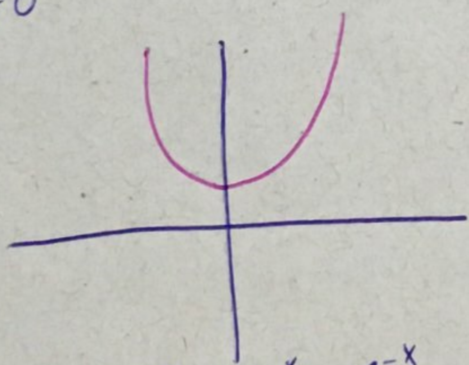
Ejercicio Adicional, bueno al corazón. $y = x^{x^x}$, Cual es $(x^{x^x})'$ su derivada?

c) $\cosh^{-1}(x) = f(x)$; ojo $\cosh^{-1}(x) \neq \frac{1}{\cosh(x)}$

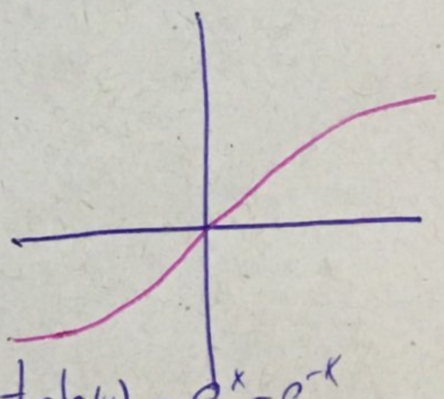
Esta es la inversa de la función $\cosh(x)$, pero recordemos un poco de aquellas primero



$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

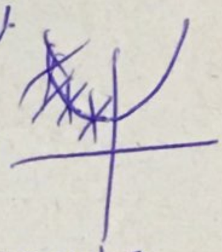
Queremos estudiar su inversa y luego su derivada, pero, para tener inversa debe ser biyectiva

no lo cumple, no tiene inyectividad

Lo que quiero es que sea biyectiva, así su inversa existe! !!

Redefino $\cosh(x): [0, \infty+) \to [1, \infty+)$

Com esto lo que hago es eliminar el lado izquierdo de la gráfica



lo que definiendo de buena manera el recorrido y codominio (sobreyectividad)

- ahora muestro nuevo $\cosh(x)$ es biyectivo, por lo que admite inversa.
- Usaremos lo siguiente.

$$x = \cosh(\cosh^{-1}(x)) \quad / \ ()' \text{ respecto a } x$$

Esto está bien definida, pues la inversa existe.

$$1 = \operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x)) \cdot [\cosh^{-1}(x)]'$$

$$\frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))} = [\cosh^{-1}(x)]' \to \text{lo que buscamos.}$$

Te voy a llamar Lisa junior

Ahora lo que debemos notar es que el senh(x) es la función que molesta, si logro transformarla a un cosh(x) gané. Por qué! porque así el $\cosh^{-1}$ lo anula.

Ecuación fundamental de hiperbólicas

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh}(x) = \pm\sqrt{\cosh^2(x) - 1}$$

tomo !! solo solución negativa, pues la hice biyectiva!

$$\Rightarrow \operatorname{senh}(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$$

Reemplazo esto en Lisa Junior

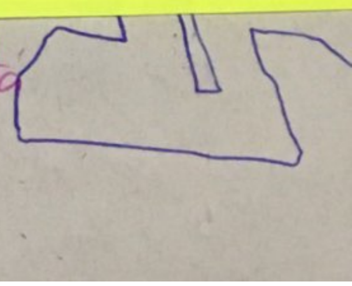
$$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))} = (\cosh^{-1}(x))'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1}} = (\cosh^{-1}(x))'$$

Notar que está bien definido!

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = (\cosh^{-1}(x))' \quad //$$

Acá no pasó nada...



forma 2, si tomo cosh(x) y despejo x es su inversa (Asumiendo que está bien definida)

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x} \rightarrow 1 \text{ conveniente}$$

$$e^x 2y = e^x \cdot e^x + 1 \quad ; \quad z = e^x$$

$$\Rightarrow 2yz = z^2 + 1$$

$$0 = z^2 - 2yz + 1 \quad ; \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a, b, c coeficientes cuadrática

$$\Rightarrow e^x = z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

. tomo solo positivo por biyectividad

$$z = \frac{+2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$$

tomando ln(x)

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \qquad \boxed{z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}}$$

Luego cambio roles de x, con y ; pues es la inversa.

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \,/\!/_{()'} ;$$ pero recordemos y es $\cosh^{-1}(x)$

deriva y regla de cadena.

$$y' = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})} \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$y' = [\cosh^{-1}(x)]' = \frac{1}{\cancel{(x+\sqrt{x^2-1})}} \left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2-1} + x}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,/\!/$$ bien definida!

P2) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\phi(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Estudiar diferenciabilidad en $\mathbb{R}$ para diferentes valores de n.

Notar que ϕ es definida por tramos, por lo que $x=0$, no podemos derivar de otra forma si no es por definición, todo esto en el caso que sea diferenciable en 0.

En el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y = 0$), ...

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Leftrightarrow x \neq 0$

$\phi(x) = x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ Es derivable por álgebra y composición de funciones derivables, $\forall n \geq 1$

Para $x = 0$ debemos ver que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0},$$ existe, en cuyo caso ϕ será derivable

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

si $n = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ lo cual diverge y no existe.

si $n \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \to$ nula por acotada y es 0.

Veamos ahora su derivada

Si $n \geq 2$ ϕ será diferenciable y

regla producto

$$\phi'(x) = \begin{cases} (x^n \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))' = nx^{n-1}\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) + x^n \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si $n = 1$ no es derivable en $x = 0$
y por lo que no es derivable en todo $\mathbb{R}$.

P3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x+y) = f(x)f(y) \; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
no constante ;

a) Probar $f(0) = 1$; probar $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Calcule $f'(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

a) Veamos que quiero probar que $f(0) = 1$,
primero veremos algunas propiedades y luego lo
supondremos por contradicción ; es decir $f(0) \neq 1$

* $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$ Por definición.

$\Rightarrow f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0)[1 - f(0)] = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = 1$

[Contradicción] si $f(0) = 0$; $\neq 1$

$f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = 0$

si vale 0 ; hace que la función $f(x)$ sea constante igual 0, lo que se contradice con el enunciado.

Explosión!

$\Rightarrow f(0) = 1$ //

a) ¿Para probar $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; procederemos por [contradicción]

$\Rightarrow f(x) \leq 0$

luego $f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f(0) \leq 0$

Además tenemos que la función es continua. ¿A qué me recuerda?

En efecto en virtud del TVI

$\exists z \in [0, x] \,/\, f(z) = 0$

luego tomo $f(0) = f(z - z)$

$$f(0) = f(z) f(-z)$$

$$f(0) = 0 \cdot f(-z)$$

$$f(0) = 0$$

lo que nos llevó a una contradicción $\Rightarrow f(x) > 0$.

b) Calculamos $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$; recordando que asumimos que $f'(0)$ existe,

$= f'(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= f(x) f'(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Acabo! Estudien; no queden con dudas. Existe

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl