MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Resumen C1-Estudio Sucesiones-funciones-derivación-optimización

08 de Septiembre de 2021

- Una **sucesión** es una función

$$\begin{aligned} s \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$

- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$

- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$

- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$

- **Caracterización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$

- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$

- **[Teorema de Weierstras]**
  Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

- **[Continuidad Uniforme]**
  Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

  $$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

  Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\overline{x}$ que puedo estudiar.

- Toda función uniformemente continua es continua.

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$

- Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el limite

  $$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

  Equivalentemente, f es derivable en $\overline{x}$ si existe $m = f'(\overline{x})$ tal que $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$

- Si f es derivable en $\overline{x}$ entonces es continua en $\overline{x}$

- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:

  1. $f \pm g$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$
  2. $f \cdot g$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$$
  3. Si $g(\overline{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$$

- **[Regla de la cadena]**
  Sean $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

  $$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

  Tambien se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x.

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f:(a,b)\to(c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x}\in(a,b)$ con $f'(\overline{x})\neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ es derivable en $\overline{y}=f(\overline{x})\in(c,d)$ con

$$(f^{-1})'(\overline{y})=\frac{1}{f'(\overline{x})}=\frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$

  Analogamente $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y=y(x)$ y $x=x(y)$

- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f\cdot g)$ está dada por:

$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a)$$

Derivadas conocidas

1. $(c)'=0$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
3. $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sinh(x))'=\cosh(x)$
5. $(\cosh(x))'=\sinh(x)$
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\sin(x))'=\cos(x)$
8. $(\cos(x))'=-\sin(x)$
9. $(\tan(x))'=\sec(x)^2$
10. $(\arcsin(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos(x))'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arctan(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(a^x)'=a^x\ln(a)$
14. $(\log_a(x))'=\dfrac{1}{x\ln(a)}$