MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Corre corre corazón?Correo =) pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 5: Aplicaciones de Derivadasssss

de 2021

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $\overline{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$$

  Es decir, llamaremos a $\overline{x}$ como mínimo local si $f(\overline{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

  De manera análoga se define el máximo local

- **[Máximos y Mínimos]** Si $\overline{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x}) = 0$

- **[Teorema de Rolle]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- **[TVM]** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

  En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **[L'Hopital]** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables tales que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

  Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **[Asíntotas]** 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)

  1. Horizontal: $y = c$, calcular $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$.
  2. Vertical: $x = a$, encontrar a tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \to \pm\infty$.
  3. Oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx$

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se tiene lo siguiente

  - Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

  Análogo para estrictamente creciente/decreciente

- **[Convexidad]** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

  o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.

- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente

- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
  Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$

  Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

A partir de esta auxiliar trabajaremos bajo la nomenclatura que he estado trabajando algunos semestres siendo auxiliar, esta será definir en un comienzo (Intuición/Matraca/Teoría) esto permitirá aterrizar más el trabajo que realizaremos, y luego poder calificarlo desde +1 hasta +3 con enteros!(+1,+2,+3). Donde ustedes definirán la dificultad y luego les comentaré la mía, donde les diré su nivel de importancia.[Espacios para que ustedes llenen lo más importantes y tengan una mejor visión al enfrentar el ejercicio de nuevo]

P1. Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

I

$$|cos(x) - cos(y)| \leq |x - y|$$

II Es uniforme continua[Matraca?]

a) Intuición: Lo que busca este ejercicio en un comienzo es poder demostrar una desigualadad que de manera directa uno debe poder concluir que demostrarlo por definición no es una buena idea, dado que contiene $|\quad|$ los valores absolutos por su definición en cada caso me dan dos opciones disponibles, como hay dos habría que analizar 4 casos.
Ahora lo que nos queda ver es como poder atacar el ejercicio, por lo que uno al recordar la tesis del TVM nos entrega algo muy similar a lo pedido con una derivada, las únicas diferencias ahora son la igualdad, y los valores absolutos, nada que no pueda solucionar sus buenas cotas!
Para la segunda parte debe ser muy influyente la parte anterior, pues es muy parecida a la caracterización de ser continua uniforme vía $\varepsilon - \delta$, entonces el relacionar estas dos cosas es lo que debemos desarrollar como intuición.

b) Matraca: La matraca de este ejercicio se reduce a poder trabajar bien la igualdad entregada por TVM además de acotar de buena manera la función trigonométrica con conocimientos de MA-10001 !!

Para parte la que sigue el relacionar "lo que tenemosçon "lo que queremos", en este caso la desigualdad me entrega mi hipóteis de manera directa, por lo que trabajarla y llegar a la tesis es la matraca(definir el delta)

c) Teoría: El armar la hipótesis para usar TVM es crucial, allí notar que x, y son arbitrarios, y que mis funciones son bien portadas, donde puedo generar el intervalo cerrado y acotado requerido, además de comprobar los demás puntos.
Para la última parte la teoría me respalda el porque puedo tomar un delta culauquiera, y porque este delta está bien definido solo en función de epsilon, sin depender del punto(hacer dibujito de continuidad o lim $\varepsilon - \delta$) para enclarecer concepto.

Ahora haremos un análisis posterior (si dá el tiempo o tarea personal preguntable a mi correo!). Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$, debo ver mi dominio!, que pasa con la teoría? si tomo el intervalo $\forall x, y \in [\varepsilon, a]$, si analizo $\lim_{\varepsilon \to 0}[\varepsilon, a]$?. Siempre a fue fijo y real hasta la muerte. AA

P2. Calcular

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)}$$

a) Intuición: Solo con verlo debemos notar que es un límite que tiene pinta de feo, luego de eso debo pensar varias formas de poder atacarlo(límites conocidos, sándwich y L'hopital), pero debemos descontar la primera forma porque se ve una matraca larga, la segunda también porque tengo varias exponenciales, entonces me queda la opción del sagrado pero mortal L'hopital *b*) Matraca: Luego la matraca se reduce a derivar el numerador y denominador de forma indiscriminada sin pensar en lo que puede pasar, luego repetir este proceso porque llegamos a la indeterminación del tipo que abarca L'hopital, así que se repite el proceso cuantas veces sea necesario para salvar la compañía.

c) Teoría:L'hopital tiene condiciones de cuando puedo usarlo y como debo usarlo, acá nos percatamos de cumplir de buena manera estas, como es esto? verificando que el límite sea del tipo $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ además debo verificar que cada el denominador y numerador converja en cada caso, y el primero sea no nulo. Esto debo verlo para cada caso!

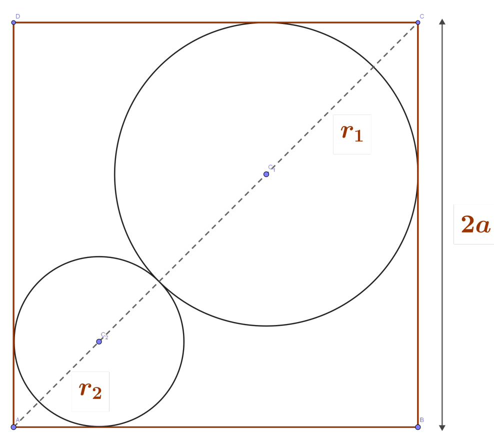
P3. [Optimización]

a) Considere un triángulo isósceles, donde el largo de los lados iguales es L y θ es el valor del ángulo entre los lados iguales. ¿Cuál es el valor de θ que maximiza el área del triángulo?

b) En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2, centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.

1) Encuentre una relación entre r_1 y r_2

2) Determine los valores de r_1 y de r_2 de modo que la suma de las áreas de los círculos sea máxima. Justifique



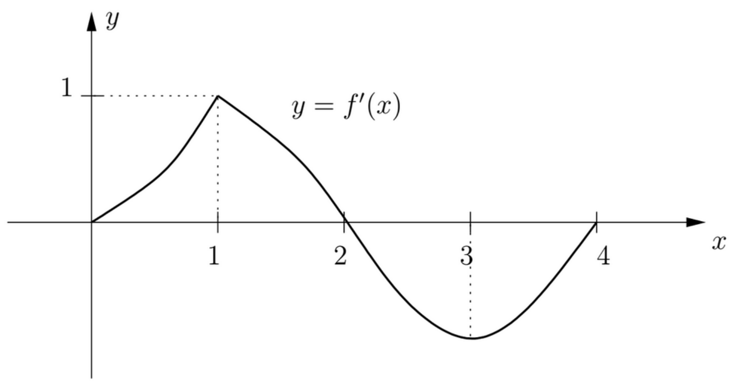
a) Intuición: Para este tipo de ejercicios ocurre lo siguiente, es que tendremos un problema casi siempre a modelar, que me dará una serie de ecuaciones y variables, yo a partir de eso despejo ecuaciones como loco!!!, para poder dejar todo en función de una sola variable, llamémosla 'x'para trabajar de manera más usual y así poder hacer lo de toda la vida, que es derivar a igualar a 0, es decir, $f'(x) = 0$
Para el primer caso sabemos que debemos tener el área del triángulo, así que conseguir la base y la altura en función del ángulo dado es una buena intuición.
Para el segundo caso buscar la primera relación geométricamente te permite seguir el ejercicio de manera directa.

b) Matraca: Claro nuestra meta es obtener la base y la altura en función del ángulo en disputa, por lo que recordar la razón del $sen(x)$ y el $cos(x)$, o bien ocupar el teorema del coseno y teorema del seno. La primera opción sigue siendo más corta u directa.
Para el segundo caso la idea es usar el Principio de Fermat, ie, $f'(x) = 0$ para poder buscar candidatos, pero en esto debemos primero encontrar en base a la información anterior expresiones

para las áreas, luego notar que nos quedan en dos variables!! ahí es donde usamos la ecuaciones que tenemos para dejarlo en una sola variable, y así encontrar candidatos, ahora la matraca se reduce al estudio de esos candidatos. Luego a partir de es el elemento que encontré es máximo o mínimo? al concluir esto debo notar que la función es continua en un intervalo en particular, entonces estudio la contraparte concluyendo el ejercicio.

c) Teoría:Una vez que encontramos la solución de la ecuación que nos queda al despejar la variable *theta*, llegamos a una expresión un tanto general, pero al adecuarse al problema hay una condición para los posibles valores de θ, y justificar por qué es un máximo? lo que va de la mano con el crecimiento del $sen(x)$ que es lo teórico.

P4. Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f. Debe indicar precisamente en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3 (use TVM)

a) Intuición: Para este ejercicio lo más importante a tener en cuenta es que la gráfica que nos representan es de la derivada de f, entonces nos entrega signos y crecimientos, que es donde me debo enfocar.

b) Matraca: Estudiar intervalo a intervalo como se comporta y concluir de manera directa a través de los teoremas.

c) Teoría: En esta parte es fundamental, pues si se tiene un buen manejo de la teoría, además recordar estudiar los casos borde de manera especial y que a través del crecimiento descubierto de función original ver si se trata de un máximo o mínimo. El si es local o global se debe concluir, y para la cota superior, basta notar que cumple las hipótesis de un teorema en particular ,TVM puede ser útil, y luego ver que información tengo que me pueda entregar una desigualdad, esto será crucial para finiquitar el ejercicio.

Negación[SIN] PROPUESTOS-MUCHO ÉXITO EN EL ESTUDIO

"Con el sueño haz de ser moderado, porque quien no madruga con el sol, no goza del día.."
Don Quijote de la Mancha-Miguel de Cervantes

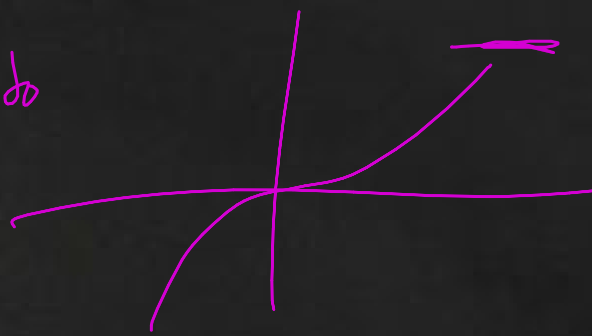
$f'(x) = 0$

formas de justificar esto

1) crecimiento + acotado

2) criterio

3) gráfico



TVMG: Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones (fns) continuas $[a,b]$ y derivables en (a,b)

$g(b) \neq g(a)$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

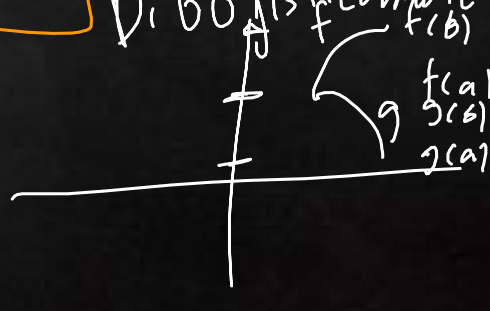
El caso particular de $g(x) = x$, $g(b) = b$, $g(a) = a$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \to m$

Dibujísticamente hablando



$\} f(b) - f(a)$

$\} g(b) - g(a)$

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} \overset{L'H}{=} \lim \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^\infty \longrightarrow f(x)^{g(x)} \quad f^g$$

$$f^g = \exp(\ln(f^g)) \quad / \lim$$

$$f^g = \exp(g \ln(f))$$

$$f^g = e^{g \cdot \ln(f)}$$

$$\lim f^g = \lim e^{g \ln(f)} = e^{\lim g \cdot \ln(f)} \qquad \begin{matrix} 0 & \infty \\ \uparrow & \uparrow \end{matrix}$$

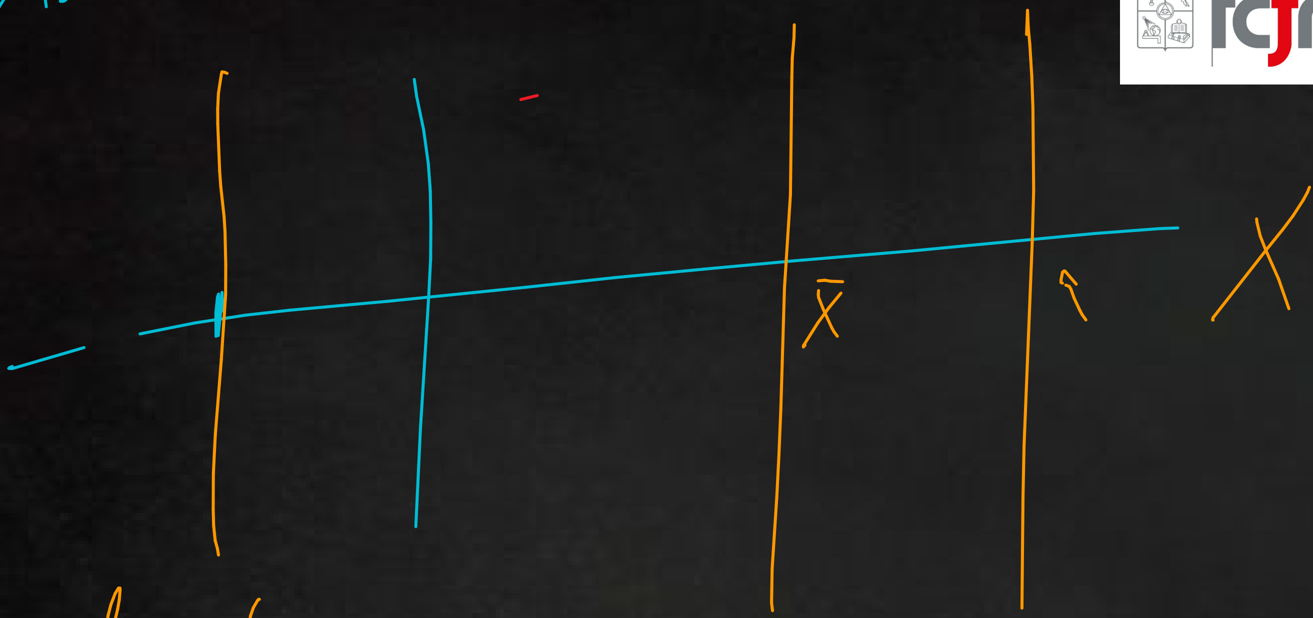
$$= e^{\lim \frac{g}{1/\ln(f)}}$$

$$f^g \checkmark \quad \frac{0}{0} \checkmark \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$f - g = \frac{\frac{f}{g} - \frac{g}{f}}{\frac{1}{fg}(g+f)} = \frac{\frac{f^2 - g^2}{gf}}{\frac{(g+f)}{fg}} = \frac{(f-g)\cancel{(g+f)}\cancel{gf}}{\cancel{(g+f)}\cancel{gf}}$$

$$\frac{\text{sen}(x) + x^2}{x^2} \quad / \quad x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \to 0$$

Asintota vertical



$\lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ verticales

Asintotas horizontales $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l, \; l \in \mathbb{R}$

Asinto oblicua, $y = mx + n \Rightarrow y - mx = n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

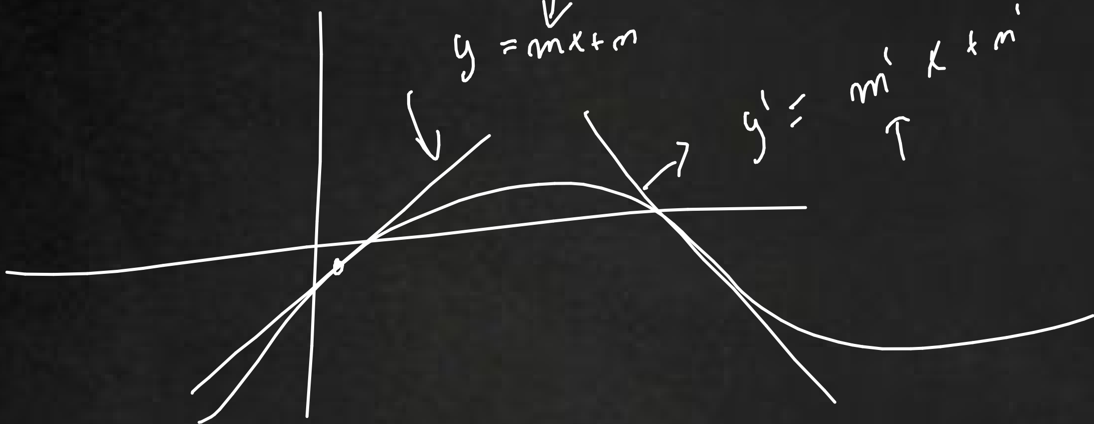
Derivadas y monotonía

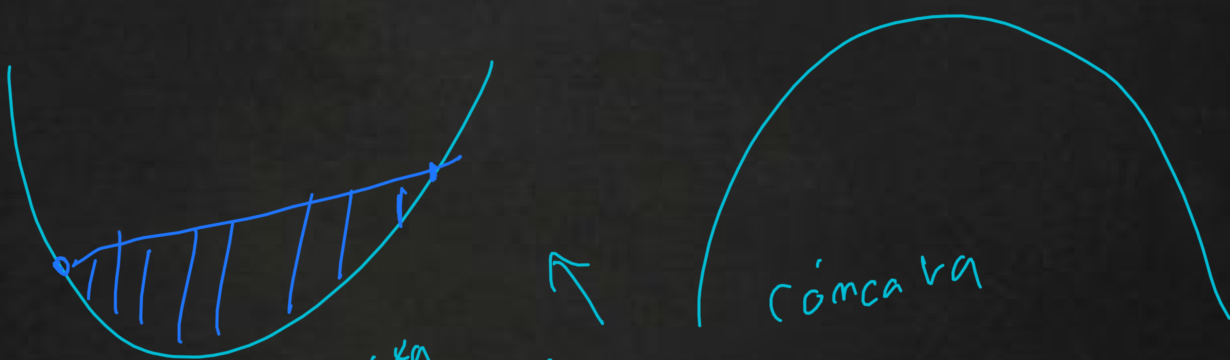
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $[a,b]$

y derivable en (a,b)

$f'(x)\geq 0$ (respectivamente ≤ 0), $\forall x\in(a,b)$

f creciente o decreciente





convexa

$x^2 \to f'(x) = 2x \to f''(x) = 2 > 0$

Aproximación

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

P1) Proof $|\cos(x)-\cos(y)| \le |x-y|$

Spg $x<y$

1) $|\cos(x)-\cos(y)| \le -(x-y) = -x+y$

1.1 $\cos(x)-\cos(y) \le -x+y$

1.2 $-\cos(x)+\cos(y) \le -x+y$

$x>y$

... forma matraca

Idea usar TVM. Como $x,y \in \mathbb{R}$ y son arbitrarios puedo ver $x>y$ $x<y$ $x=y$ (tricotomía)

$x<y$ | $f(x)=\cos(x)$, $\cos(x)$ es continua y derivable por Introducción al cálculo en todo $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ será continua en $[x,y] \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ será derivable en $\text{int}([x,y]) = (x,y)$

$x \neq y$ pues $x<y$, $x \neq 0$ $[x,y]$

Cumpliendo hipótesis de TVM

$\#\ |-\text{sen}(\xi)|$

$|-1||\text{sen}(\xi)|$

$|\text{sen}(\xi)| \le 1$

$\exists\, \xi \in [x,y]$ tal que

$$\frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y} = f'(\xi) = \cos'(\xi) = -\text{sen}(\xi) \quad /|\cdot|$$

$\cos(x)-\cos(y) = -\text{sen}(\xi)(x-y)$

$\Rightarrow |\cos(x)-\cos(y)| = |-\text{sen}(\xi)||(x-y)|$

$|\cos(x)-\cos(y)| \le |x-y|$, como $x<y$ arbitrario $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)-\cos(x)|$

II) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua uniforme si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

yo sé $\quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y| \leq \delta$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |x-y| \leq \delta$

$\delta = \varepsilon$ notamos $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y| \leq \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |\cos(x) - \cos(y)| \leq \varepsilon$

$$\underbrace{|x-y| \leq \delta}_{\text{Hip}} \Rightarrow \underbrace{|\cos(x) - \cos(y)| \leq \varepsilon}_{\text{Tésis}}$$

$\therefore \cos(x)$ cont unif.

P2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)}$$

$$= \frac{e^0 - e^{-0} - 2\cdot 0}{0 - \text{sin}(0)} = \frac{0}{0}$$ L'Hopital de cabeza

Abuso de notación

$(-e^{-x})' = -(e^{-x})'$

Lineal, saca escalar

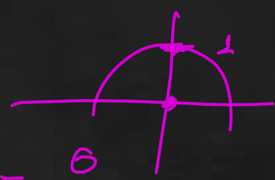
$(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x} \cdots$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sin}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (-e^{-x}) - 2}{1 - \cos(x)}$$

Abuso notación

$$= \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$\cos(x)$



Voy de cabeza x2

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)}{(1 - \cos(x))}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-(-\text{sin}(x))}$$

$(a+b)'$

$a' + b'$

$(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$

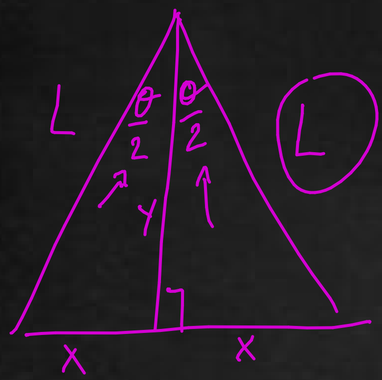
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sin}(x)}$$ Abuso notación $$= \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Voy con L'Hopital de cabeza x3

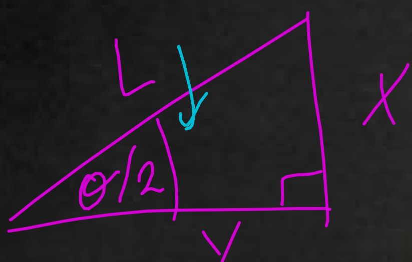
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1 + 1}{1} = 2 \ //$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sin}(x)} = 2 \ //$$

P3) Tengo un triangulo isócelos donde L es el largo de lados iguales y θ su ángulo



¿Cual es el valor de θ para que el área máxima.



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{L} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) L = x$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{L} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) L = y$$

Yo quiero maximizar el área

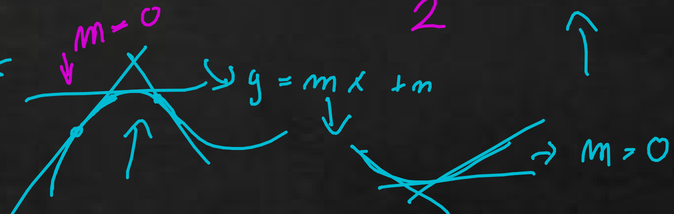
$$A(\Delta) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\cancel{2}x \cdot y}{\cancel{2}} = L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot L \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{2L^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

$2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)$ *

$$\frac{L^2 \operatorname{sen}(\theta)}{2} = A(\Delta(\theta))$$

Recuerdo derivada es



$$A'(\Delta(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{L^2 \operatorname{sen}(\theta)}{2}\right)' = \frac{L^2}{2}(\operatorname{sen}(\theta))' = \frac{L^2}{2} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow L^2\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

, si $k=1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} > \pi$ no pasa

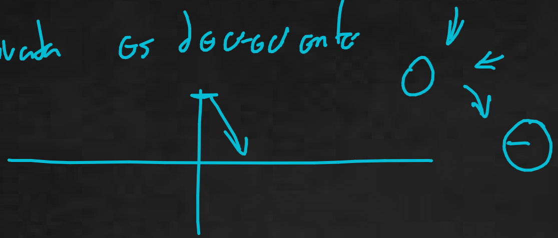
$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Notemos $A'(\Delta(\theta)) = \dfrac{L^2 \cos(\theta)}{2}$

$$A''(\Delta(\theta)) = -\frac{L^2}{2}\operatorname{sen}(\theta) < 0$$

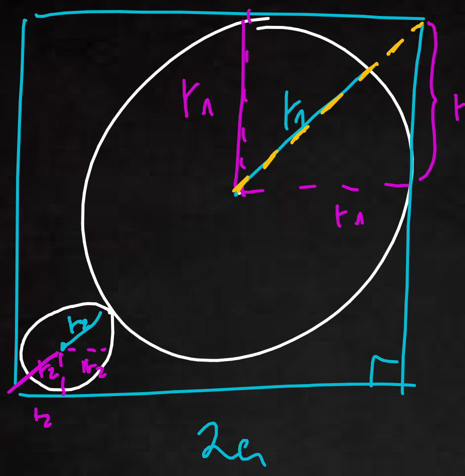
1) cóncava $\Rightarrow$ máx

2) la derivada es decreciente

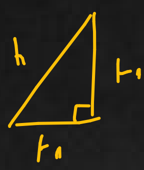


$\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ es máx local

$\theta \in (0, \pi)$



1) Encontrar relación entre r_1 y r_2



$$r_1^2 + r_1^2 = h^2$$

$$\boxed{r_1\sqrt{2} = h}$$

$r_2\sqrt{2} =$

$$2a\sqrt{2} = r_2\sqrt{2} + r_2 + r_1 + r_1\sqrt{2} \qquad (1)$$

2) cual es el valor de r_1 y r_2 para que el área sea máxima.

$$A(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$(1) \Rightarrow 2a\sqrt{2} = r_2(\sqrt{2}+1) + r_1(\sqrt{2}+1)$$

$$2a\sqrt{2} = (r_2 + r_1)(\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = (r_2 + r_1)$$

$$\frac{2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - r_2 = r_1$$

$$2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - r_2 = r_1$$

$$\Rightarrow A(r_1, r_2) = \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

$$A(r_2) = \pi\left((2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - r_2)^2 + r_2^2\right)$$

$$A'(r_2) = 0$$

$$A'(r_2) = \pi\left(4a^2 \cdot 2(\sqrt{2}-1)^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_2 + r_2^2 + r_2^2\right)'$$

$$A'(r_2) = \pi\left(-4a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 2r_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow -4a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 2r_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$

$r_2 = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $r_1, r_2 \in [0,a]$

$f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ máximo local

$$A'(r_2) = \pi\left(-4a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 2r_2\right) = 0$$

$$r_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow A'(r_2) = \pi\left(-4a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 2\left(a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\right)\right)$$

$$= \pi\left(\cancel{-4a\sqrt{2}\sqrt{2}} + 4a\sqrt{2} + \cancel{4a\sqrt{2}}\sqrt{2} + 4a\sqrt{2}\right)$$

$$= 8a\sqrt{2}\pi$$

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, si $[a,b]$ cerrado y acotado y f es continua existe y se alcanza max y mínimo

$$A(h): [0,a] \to \mathbb{R} \qquad r_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Me faltaba ver los extremos porque existen

$r_1 = 0$ $\wedge$ $r_2 = a$

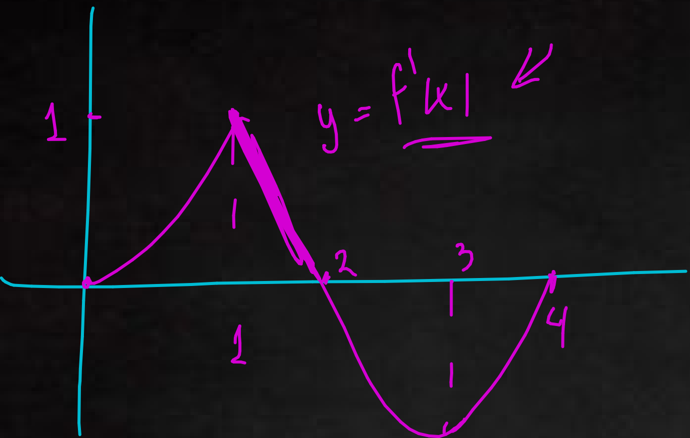
no para

$$r_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - r_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} - a$$

$$= 2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - a$$

$$\underline{r_1} = 4a - a - 2a\sqrt{2} = 3a - 2a\sqrt{2}$$

$$A(r_1,r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi\left(a^2(9-12\sqrt{2}+8)\right) + \pi a^2 = \pi a^2(18-12\sqrt{2})$$



$f'(x) > 0$ si $x \in (1,2)$

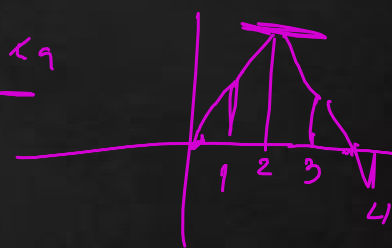
$f'(x) < 0$ si $x \in (2,4)$

La derivada existe en $[0,4]$

$f(0) = 1$

1) En $[0,1)$ • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

$\underbrace{f'(x) \text{ es creciente}}_{f''(x) > 0} \Rightarrow f$ convexa



$x = 0$ mín local

2) En $[1,2)$ • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

$\underbrace{f'(x) \text{ es decreciente}}_{f''(x) < 0} \Rightarrow f$ concava

$x = 1$ punto inflexión

3) En $[2,3)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

$f'(x)$ decreciente $\Rightarrow f$ concava

$x = 2$ max global

4) En $[3,4]$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

$f'(x)$ creciente $\Rightarrow f$ convexa

$x = 3$ punto inflexión

$x = 4$ mínimo local

Sabemos $[0,4] \Rightarrow$ existe max y min y se alcanza

$x = 0 \vee x = 4$ no puedo saber global.

Aplicación de TVM

$f(x) \leq 3$

$x \in [0,4]$, f derivable en $(0,4)$
continua en $[0,4]$

SPG $[0,x]$ derivable en $(0,x)$

TVM $\exists\, c \in (0,x)$ tq

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \quad , f(0)=1$$

$$f(x)-f(0) = f'(c)\cdot x$$

$$\boxed{f(x) = f'(c)\cdot x + 1}$$

yo se $x=2$ max global

$$f(x) \leq f(2) \quad \forall x \in [0,4]$$

$x=2 \Rightarrow$ $f(2) = 2f'(c)+1$

$$f(2) \leq 2f'(1)+1$$

$$f(x) \leq f(2) \leq 2\cdot 1 + 1 \leq 3$$

$$f(x) \leq 3$$