MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Repaso

2021

Estimados y estimadas, espero estén de lo mejor acá estaría la sorpresa, lo que nadie pidió pero todxs necesitamos, REPASOOOOOOOOOOOOOOO

1. **(3.0pts)** Usando la regla de L'Hopital calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\ln(1+x^2)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\sin x-1)'}{(\ln(1+x^2))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\frac{2x}{1+x^2}}\text{ (Por L'Hopital pues }\frac{e^0-\sin 0-1}{\ln(1+0^2)}=\frac{0}{0}\text{)}(\mathbf{1pt})$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}\text{ (Por L'Hopital pues }\frac{e^0-\cos 0}{\frac{2\cdot 0}{1+0^2}}=\frac{0}{0}\text{)}(\mathbf{1pt})$$
$$=\frac{e^0+\sin 0}{\frac{2(1+0^2)-4\cdot 0^2}{(1+0^2)^2}}=\frac{1}{2}.$$

Sean A y B constantes reales. Considere la función
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sin(\pi x)}{\pi(x^2-4)}, & \text{si } x<2,\\ x^2-3, & \text{si } 2\le x<5,\\ x^2+Ax+B, & \text{si } x\ge 5.\end{cases}$$

Se pide:

1. **(3.0 pts)** Determine si f es continua o no en $x=2$. Justifique su respuesta.
2. **(3.0 pts)** Encuentre valores para A y B de modo que f sea derivable en $x=5$. Justifique su respuesta.

1.

2. Observe que f está definida en $x=2$ y es igual a $f(2)=2^2-3=1$. Verifiquemos si los límites laterales de f en $x=2$ coinciden o no: Sea $h_1(x)=4\sin(\pi x)$ y $h_2(x)=\pi(x^2-1)$. Sus derivadas son $h_1'(x)=4\pi\cos(\pi x)$ y $h_2'(x)=2\pi x$. observe que $h_1(2)=4\sin(2\pi)=0=\pi(2^2-4)=h_2(2)$ y $h_2'(x)=4\pi\neq 0$. Así, empleando la regla de L'Hopital tenemos
$$\lim_{x\to 2}\frac{4\sin(\pi x)}{\pi(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{4\pi\cos(\pi x)}{2\pi x}=\frac{4\pi\cos(2\pi)}{4\pi}=1.$$
Así, $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{4\sin(\pi x)}{\pi(x^2-4)}=1$. Por otra parte, como x^2-3 es continua en todos los reales se tiene $\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=2^2-3=1$. Se concluye que $\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=1$ y así f es continua en $x=2$.

a) **(2.5pts)** $f:(a,b)\to(0,+\infty)$ biyectiva derivable con inversa derivable, y considere $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$h(x)=\frac{1}{1+f^{-1}(x)}.$$

Muestre que

$$h'(x)f'(f^{-1}(x))+h^2(x)=0$$

b) **(2.0pts)** Calcular la derivada de $g(x)=(1+x^2)^x$
Indicación: Notar que $u(x)^{v(x)}=\exp(v(x)\ln(u(x)))$

c) **(3.5pts)** Calcular la derivada de

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)^3}e^{2x+1}.$$

Indicación: Puede ser útil derivar implícitamente $\ln(y)$ *con* $y=h(x)$ *y despejar* y'

Sol:

a) Calculamos la derivada de h

$$h'(x)=-\frac{1}{(1+f^{-1}(x))^2}\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\quad\textbf{(1.5pts)}$$

Luego remplazando en la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}h'(x)f'(f^{-1}(x))+h^2(x)&=-\frac{1}{(1+f^{-1}(x))^2}\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}f'(f^{-1}(x))+\frac{1}{(1+f^{-1}(x))^2}\\&=0\quad\textbf{(1.0pts)}\end{aligned}$$

b) Calculamos la derivada de $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)^3}e^{2x+1}$. Notamos que

$$\ln(y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+2\ln(x+1)-3\ln(x^2+1)+2x+1.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-3\ln(x^2+1)+2x+1\right)\\&=\frac{x}{x^2+2}-\frac{6x}{x^2+1}+2\quad\textbf{(1.5pts)}\end{aligned}$$

Es decir,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)^3}e^{2x+1}\left(\frac{x}{x^2+2}-\frac{6x}{x^2+1}+2\right)\textbf{(0.5pts)}$$

P3. Considere la función

$$f(x)=\frac{\cos(x^2)}{x}.$$

a) **(4.0pts)** Calcule explícitamente el polinomio de Taylor $T_f^2(x)$ de segundo orden ($n=2$) en torno a $x=\sqrt{\pi}$.

b) **(2.0pts)** Calcule explícitamente la función de error de aproximación de tercer orden, $E_3(x)$. Evalue el error de aproximación para $x=\sqrt{\pi}+0{,}1$. y muestre que

$$\left|\frac{\cos((\sqrt{\pi}+0{,}1)^2)}{\sqrt{\pi}+0{,}1}-T_f^2(\sqrt{\pi}+0{,}1)\right|\le\left(1+(\sqrt{\pi}+0{,}1)^2\right)10^{-3}$$

donde $T_f^2(x)$ es el polinomio de Taylor del punto a). *Nota: La cota podría depender de una cantidad desconocida.*

Sol:

a) Partimos calculando las derivadas de orden superior de f. Para ello, se utiliza la regla de cadena y regla del producto (también puede usarse la regla del cuociente).

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos(x^2)}{x^2} + \frac{2x(-\sin(x^2))}{x} \\ &= -\frac{\cos(x^2)}{x^2} - 2\sin(x^2). \quad \textbf{+ 1.0pto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\cos(x^2)}{x^3} - \frac{2x(-\sin(x^2))}{x^2} - 2(2x)\cos(x^2) \\ &= \frac{2\cos(x^2)}{x^3} + \frac{2\sin(x^2)}{x} - 4x\cos(x^2). \quad \textbf{+ 1.0pto} \end{aligned}$$

Evaluando en el punto de interes $x_0 = \sqrt{\pi}$ obtenemos

$$f(\sqrt{\pi}) = \frac{\cos(\pi)}{\sqrt{\pi}} = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}$$

$$f'(\sqrt{\pi}) = -\frac{\cos(\pi)}{\pi} - 2\sin(\pi) = \frac{1}{\pi} - 0 \qquad \textbf{+ 1.0pto}$$

$$f''(\sqrt{\pi}) = \frac{2\cos(\pi)}{\pi^{3/2}} + \frac{2\sin(\pi)}{\sqrt{\pi}} - 4\sqrt{\pi}\cos(\pi) = -\frac{2}{\pi^{3/2}} + 0 + 4\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor se calcula como sigue

$$\begin{aligned} T_f^2(x) &= f(\sqrt{\pi}) + f'(\sqrt{\pi})(x-\sqrt{\pi}) + +\frac{1}{2!}f''(\sqrt{\pi})(x-\sqrt{\pi})^2 \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\pi}(x-\sqrt{\pi}) + (4\sqrt{\pi} - \frac{2}{\pi^{3/2}})(x-\sqrt{\pi})^2 \end{aligned} \qquad \textbf{+ 1.0pto}$$

b) Calculamos la función de error mediante la fórmula

$$E_3(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-\sqrt{\pi})^3 \quad \text{donde} \quad c \in (0,x). \quad \textbf{+0.5pts}$$

en donde la tercera derivada se calcula como sigue

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \left(\frac{2(-3)\cos(x^2)}{x^4} + \frac{2(2x)(-\sin(x^2))}{x^3}\right) + \left(\frac{2(-1)\sin(x^2)}{x^2} + \frac{2(2x)\cos(x^2)}{x}\right) \\ &\quad - 4\cos(x^2) - 4x(2x)(-\sin(x^2)) \\ &= -\frac{6\cos(x^2)}{x^4} - \frac{4\sin(x^2)}{x^2} - \frac{2\sin(x^2)}{x^2} + 4\cos(x^2) - 4\cos(x^2) + 8x^2\sin(x^2) \\ &= -\frac{6\cos(x^2)}{x^4} - \frac{6\sin(x^2)}{x^2} + 8x^2\sin(x^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E_3(x) = \frac{1}{6}\left(-\frac{6\cos(c^2)}{c^4} - \frac{6\sin(c^2)}{c^2} + 8c^2\sin(c^2)\right)(x-\sqrt{\pi})^3 \quad \textbf{+0.5pts}$$

donde c esta entre $x_0 = \sqrt{\pi}$ y x.

Al evaluar el error en $x = \sqrt{\pi} + 0{,}1$ tenemos que

$$E_3(\sqrt{\pi}+0{,}1) = \left(-\frac{\cos(c^2)}{c^4} - \frac{\sin(c^2)}{c^2} + \frac{2}{3}c^2\sin(c^2)\right)(0,1)^3 \quad \textbf{+0.5pts}$$

para un valor desconocido de

$$c \in (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}+0{,}1). \quad \textbf{+0.5pts}$$

Finalmente, podemos estimar el error de aproximación usando que

$$\begin{aligned} -\frac{\cos(c^2)}{c^4} &\le \frac{1}{\pi^2} \le \frac{1}{2} \\ -\frac{\sin(c^2)}{c^2} &\le \frac{1}{\pi} \le \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}c^2\sin(c^2) &\le (\sqrt{\pi}+0{,}1)^2 \end{aligned}$$

de esta forma

$$\begin{aligned} |f(\sqrt{\pi}+0{,}1) - T_f^2(\sqrt{\pi}+0{,}1)| &:= |E_3(\sqrt{\pi}+0{,}1)| \quad \textbf{+0.5pts} \\ &\leq \left(1 + (\sqrt{\pi}+0{,}1)^2\right) 10^{-3} \quad \textbf{+0.5pts} \end{aligned}$$

donde c es algún valor contenido estrictamente entre 0 y $\sqrt{\pi}+0{,}1$ (desconocido). $\square$