MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Resumen C2-Integración

4 Agosto 2019

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

  Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\dfrac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

  o, equivalentemente $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v$
  o, de manera compacta $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

- **Primitivas conocidas:**

1. $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
4. $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$
5. $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
7. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$
8. $\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$
9. $\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$
10. $\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$
11. $\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

- Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ como $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$

- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} S(f,P)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} s(f,P)$$

- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\int_a^b f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$

- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} s(f,P) = \lim_{|P|\to 0} S(f,P)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

  Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$

  y la geométrica: $x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$.

- Propiedades de la integral
  - $\int_a^b c = c(b-a)$
  - $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a, b]$
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a, b]$ y existe una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b). Entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in int(I)$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

- **Corolario del TFC 1:** Si la función F, continua en I es una primitiva cualquiera de f en I, entonces:

$$\forall a.b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- **TFC 2:** Sea f integrable en (a, b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a, b), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y con derivadas continuas en (a, b), entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

MA1002-1-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
correo: pyanez@dim.uchile.cl

P1. Calcule primitivas:

a) $\int cos^5(x)dx$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

c) $\int \frac{dx}{x-x^{\frac{3}{5}}}$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2e^x dx$

b) $\int cos(ln(x))dx$

P3. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\int \frac{dx}{1-x^2}$

b) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

P4. Sea $I_{p,q} = \int x^p(1+x)^q$ demuestre que $(p+1)I_{p,q} = x^{p+1}(1+x)^q - qI_{p+1,q-1}$

P5. Sean f, g funciones, tal que f es derivable, $|f(x)| \neq 0$ y $f'(x) = -f(x)g(x)$. Demuestre que

$$\int g(x)dx = -ln(|f(x)|) + C$$

Deduzca con ello que si ínf $h(x)dx = h(x)$ con $h(x) > 0$, entonces $H(x) = ke^x$

P6. Resuelva usando identidades trigonométricas.

a) $\int sin^4(x)dx$

b) $\int cos^5(x)dx$

P7. Resuelva usando cambio de variable.

a) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

b) $\int \frac{dx}{x-x^{\frac{3}{5}}}$

c) $\int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+sen(x)}}dx$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

P8. Resuelva usando cambio de variable trigonométrico.

a) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

c) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$

Propuesto: usando $u^2 = \frac{x+1}{x-1}$ calcule $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$

P9. Resuelva usando el cambio de variable $u = tan(\frac{x}{2})$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{1+sen(x)}dx$

P10. Resuelva usando integración por partes

a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ *b)* $\displaystyle\int arctan(x)dx$ *c)* $\displaystyle\int cos(ln(x))dx$

Propuesto: Usando b) calcule una formula para la primitiva de f^{-1}

P11. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

P12. [Recurrencias]

a) Sea $I_{p,q} = \displaystyle\int x^p(1+x)^q$ demuestre que $(p+1)I_{p,q} = x^{p+1}(1+x)^q - qI_{p+1,q-1}$

b) Encuentre una formula de recurrencia para

1) $J_n = \displaystyle\int x^n \operatorname{sen}(x)dx$ 2) $K_n = \displaystyle\int \cos(x)^n dx$

c) Conecte $J_{m,n} = \displaystyle\int cos^m(x)sin^n(x)dx$ con $J_{m.n-2}$

d) Sean $a, b \neq 0$. Calcule:

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx \qquad J = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

Hint: *Construya un sistema de ecuaciones con I y J.*

P1

a)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}dx \qquad ;u = 1+\sin(x) \to du = \cos(x)dx \\
=& \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int u^{\frac{1}{2}} - \int u^{-\frac{1}{2}} \\
=& \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{u}(u-3)+c \\
=& \frac{2}{3}\sqrt{1+\sin(x)}(\sin(x)-2)+c \qquad ;c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx \qquad ;u = 1+\sqrt{x} \to du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to 2(u-1)du = dx \\
=& \int \frac{2(u-1)^2}{\sqrt{u}}du = 2\int \frac{u^2-2u+1}{\sqrt{u}}du = 2\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2u\frac{1}{2} + u^{-\frac{1}{2}}\right)du \\
=& \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{15}\sqrt{u}(3u^2-5u+1)+c \\
=& \frac{4}{15}(3x+\sqrt{x}+13)\sqrt{1+\sqrt{x}}+c \qquad ;c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}dx \\
= & \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}dx \qquad ; u = 1+\sqrt{1+x^2} \to du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
= & \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+c = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c \qquad ; c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

P2. Probablemente el enunciado debería decir :

$$f(x) = g'(x) + h'(x)g(x)$$

Dicho esto, veamos que la definición de primitiva nos dice que:

$$\int f(x)e^{h(x)}dx = e^{h(x)}g(x) + c \Leftrightarrow (e^{h(x)}g(x))' = f(x)e^{h(x)}$$

En efecto, el resultado es inmediato:

$$\begin{aligned} (e^{h(x)}g(x))' &= e^{h(x)}h'(x)g(x) + e^{h(x)}g'(x) \\ &= (h'(x)g(x) + g'(x))e^{h(x)} \\ &= f(x)e^{h(x)} \end{aligned}$$

P3.

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + c \Leftrightarrow (-\ln f(x))' = g(x) \qquad \text{[Por definición]}$$

En efecto,

$$(-\ln f(x))' = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

Y puesto que $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, se puede simplificar por $f(x)$ y se concluye el resultado.

P4. Como $f(x)$ es primitiva de $f(x)$, $f'(x) = f(x)$ y luego $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$.
Se tiene entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int dx = x + c$$

Por otro lado,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c = \ln f(x) + c$$

Lo último gracias a que $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, por propiedad de primitivas, solo difieren en una constante, es decir:

$$\ln f(x) - x = c \Leftrightarrow \ln f(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) = e^{x+c}.$$

"Nunca es demasiado tarde para nada."
El Coronel no tiene quien le escriba-Gabriel García Márquez