

MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021

Profesor: Leonardo Sánchez Cancino

Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

**Auxiliar 15: Extra C3**

Fecha: 25/11/21

P1. Integrales Impropias**a) Tercera Especie**

Considere la integral impropia mixta:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x + x^3}}$$

- 1) Separe la integral como la suma de dos integrales I_1, I_2 en los intervalos $(0, 1]$ y $[1, \infty)$, respectivamente, y pruebe que cada una converge.
- 2) Haga el cambio de variables $u = \frac{1}{x}$ en alguna de las dos integrales y pruebe que ambas son iguales. Justifique la convergencia de I .

b) Convergencia Absoluta

Estudie la convergencia de:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

c) Definición**P2. Intro**Demuestre que $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$, pero que sin embargo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ diverge.**a)****P3.** Considere la función $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sqrt{2-x}$ y definamos la región

$$\mathcal{R} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

- a) Calcule $A(\mathcal{R})$, el área de la región \mathcal{R}
- b) Calcule $V_{OX}(\mathcal{R})$, el volumen de revolución generado al rotar \mathcal{R} con respecto al eje X
- c) Calcule V_{OY} , el volumen de revolución generado al rotar \mathcal{R} con respecto al eje Y

P4. Demuestre que para $a > 0$ se tiene que

$$\int_0^a x f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^2 \int_0^1 x f(x) dx$$

Use este resultado para calcular $\int_0^a x (\ln x - \ln a) dx$, con $a > 0$.**P5.** Analice la convergencia de las siguientes integrales, usando las reglas de convergencia o criterios adecuados.

$$a) \int_3^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^{3/2}} dx$$

P6. Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, \infty)$ y definamos el conjunto

$$\mathcal{R} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \infty), 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

Pruebe que $A(\mathcal{R})$ existe y calcúlela, pruebe que $V_{OX}(\mathcal{R})$ existe y que $V_{OY}(\mathcal{R})$ **no** existe.