MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez

Auxiliar 12: Aplicaciones de la Integral II

15 de noviembre de 2021

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene que la longitud de la curva f entre a y b, esta dada por la fórmula:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}dx$$

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b es:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx$$

- **Área en coordenadas polares:** Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta$$

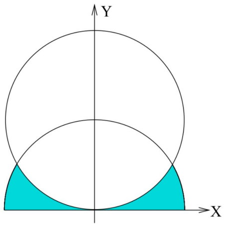
- **Centro de gravedad:** Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}$

El centro de gravedad de R esta dado por

$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2}dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

P1. *a)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

a) $r = 2$

b) $r^2 - r - 12 = 0$

c) $\theta = \frac{\pi}{6}$

d) $r = \frac{\theta}{2\pi}$

e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r = 2cos(\theta)$

g) $r = sen(2\theta)$

h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

P3. *a)* Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = sen(2\theta)$.
b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1 + cos(\theta)$

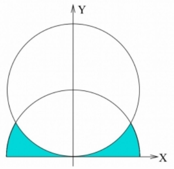
P4. Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \quad \text{y} \quad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

P1. *a)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - 2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

a) Tengo condición inicial $f(0)=0$ *

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx$$

Nuestra misión despejar $f(x)$

La longitud de 0 a x

$= x^2 + 2x - f(x)$

Aplicando la fórmula

$$L_0^x(f) = \int_0^x \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = x^2 + 2x - f(x) \ /()'$$

Lo que usaremos

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx\right)' = f(\underset{\uparrow}{v(x)}) \cdot \underset{\uparrow}{v'(x)} - f(u(x))u'(x)$$

$$\int_0^x \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = x^2+2x-f(x) \ /()'$$

$$\sqrt{1+|f'(x)|^2} \cdot \underbrace{(x)'}_{1} - \underbrace{\sqrt{1+|f'(x)|^2} \cdot 0'}_{0} = 2x+2-f'(x)$$

$$\sqrt{1+|f'(x)|^2} = (\underbrace{2x}+2-f'(x)) \ /()^2$$

$$1+\cancel{\underbrace{|f'(x)|^2}} = 4x^2+4+\cancel{\underbrace{f'(x)}^2}+8x-4(f'(x)+f'(x)x)$$

$$f'(x)[4(1+x] = 4x^2+3+8x$$

$$f'(x)[4(1+x)] = 4x^2+3+8x$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+3+8x}{4x+4} = \frac{4x+4+4x+4+4x^2-5}{4x+4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{4x^2+4x-1}{4x+4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\cancel{4}x\cancel{(x+1)}}{\cancel{4}\cancel{(x+1)}} - \frac{1}{4(x+1)}$$

$$f'(x) = 1 + x - \frac{1}{4(x+1)} \quad / \int$$

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

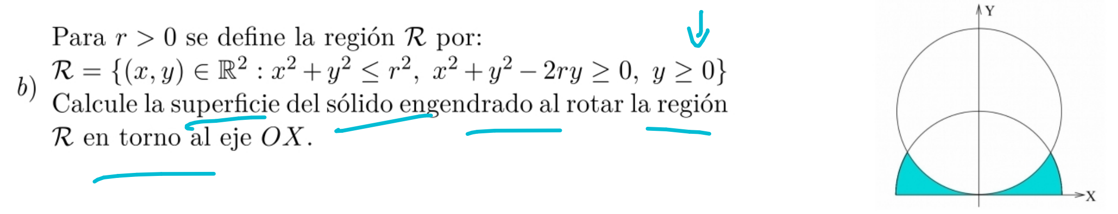
$$\underline{f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C}$$

* $f(0)=0$

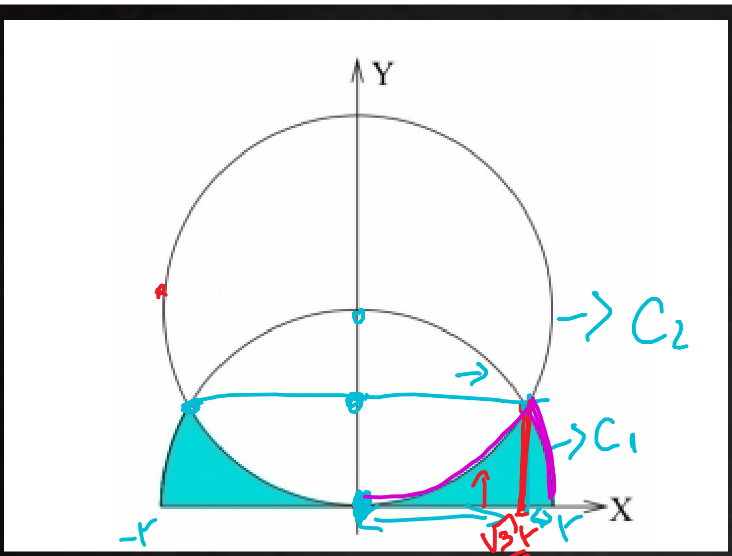
$$0 = 0 + \frac{0^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(0+1) + C$$

$$C = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(x+1) \;/\!/$$



b) Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2,\ x^2+y^2-2ry \ge 0,\ y \ge 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



$\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$

C1 $\quad x^2+y^2 \le r^2$

C2 $\quad x^2+y^2-\underbrace{2ry}_{} \ge 0 \quad / + r^2$

$$\underbrace{x^2+y^2-2ry+r^2}_{} \ge r^2$$

$$x^2+(y-r)^2 \ge r^2$$

$$x^2+(y-r)^2 = x^2+((-1)(r-y))^2$$

$$x^2+(r-y)^2$$

$x^2+y_1^2 = r^2$

$y_1 = \pm\sqrt{r^2-x^2}$

Curva 1

$x^2+(y_2-r)^2 = r^2$

$y_2 = \pm\sqrt{r^2-x^2}+r$

Curva 2

$$\cancel{\sqrt{r^2-x^2}} = \cancel{\sqrt{r^3-x^2}} + r$$

$$\boxed{r=0}$$

Este caso no me sirve

luego intento $\sqrt{r^2-x^2} = -\sqrt{r^2-x^2} + r$

$$\sqrt{r^2-x^2} = \frac{r}{2} \quad /(\;)^2$$

$$r^2 - x^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{4r^2}{4} - \frac{r^4}{4} = x^2 \Rightarrow \frac{3r^2}{4} = x^2$$

$$\boxed{x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} r}$$

$$S_{ox}(f) = 2\pi \int_a^b \underset{\uparrow}{f(x)} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \star$$

$$S_{ox} = 2\Big[2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}r}{2}} \underbrace{\left(r - \sqrt{r^2-x^2}\right)}_{f(x)} \left(\underbrace{\sqrt{1+\left(\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}}_{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) dx \Big\} I_1$$

$$\underbrace{+\, 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}r}{2}}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)\left(\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}\right) dx \Big]}_{I_2}$$

$\underline{I_1}$) $\left(r - \sqrt{r^2-x^2}\right)' = -\dfrac{1-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

lo que tengo $\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{r^2-x^2}{r^2-x^2} + \frac{x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}$$

I.1

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \left(r - \sqrt{r^2 - x^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} - r \, dx$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \underbrace{r \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} dx}_{}$$

$\nearrow$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx - \frac{\sqrt{3} r^2}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = x \qquad /()'$$

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) \operatorname{sen}^{-1}(x)' = 1$$

$$\operatorname{sen}^{-1}{}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\nearrow \quad \nearrow$

$$c^2 + s^2 = 1$$

$$c(\alpha) = \sqrt{1 - s^2(\alpha)}$$

$\downarrow$

$$= r^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = r^2 \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arcsen}(0)\right)$$

$\nearrow$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

$$= r^2 \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = I_1$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\underbrace{\left(\sqrt{1+\left|\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right|^2}\right)}_{} dx = I_2$$

$$\# \quad \sqrt{1+\left|\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}\,(-\cancel{2}x)\right|^2} = \sqrt{\frac{r^2-\cancel{x^2}}{r^2-x^2}+\frac{\cancel{x^2}}{r^2-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\nearrow$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} \frac{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\; r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\, dx = r\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} dx = r\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$= r^2 - \frac{\sqrt{3}\,r^2}{2} = I_1$$

$$S_{ox} = 2\left[2\pi I_1 + 2\pi I_2\right]$$

$$= 2\Big[2\pi\; r^2\frac{\pi}{6} - 2\pi\frac{r^2\sqrt{3}}{2} + 2\pi r^2 - 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

$$= 4\pi r^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right) \checkmark$$

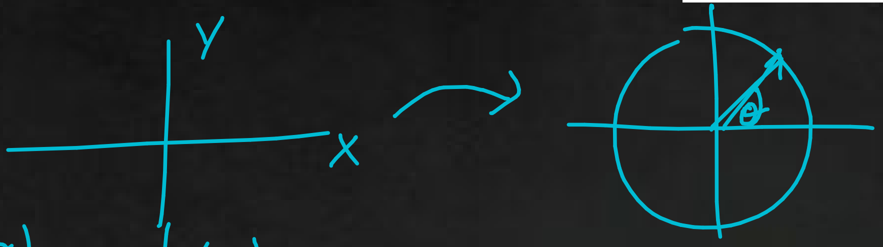
P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

a) $r = 2$	c) $\theta = \frac{\pi}{6}$	e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$	g) $r = sen(2\theta)$
b) $r^2 - r - 12 = 0$	d) $r = \frac{\theta}{2\pi}$	f) $r = 2cos(\theta)$	h) $r = 1 + 2sin(\theta)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1) $X = r\cos(\theta)$

2) $y = r\,sen(\theta)$



$$\frac{2)}{1)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = tg(\theta)$$

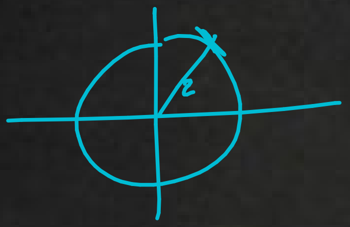
$$\boxed{arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta}$$

$$r = \frac{x}{cos(\theta)} \; ; \; r = \frac{y}{sen(\theta)}$$

Coordenadas polares

---

a) $r = 2$

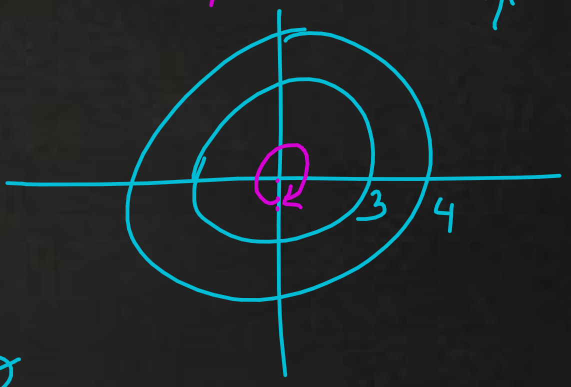


b) $r^2 - r - 12 = 0$

$(r+3)(r-4) = 0$

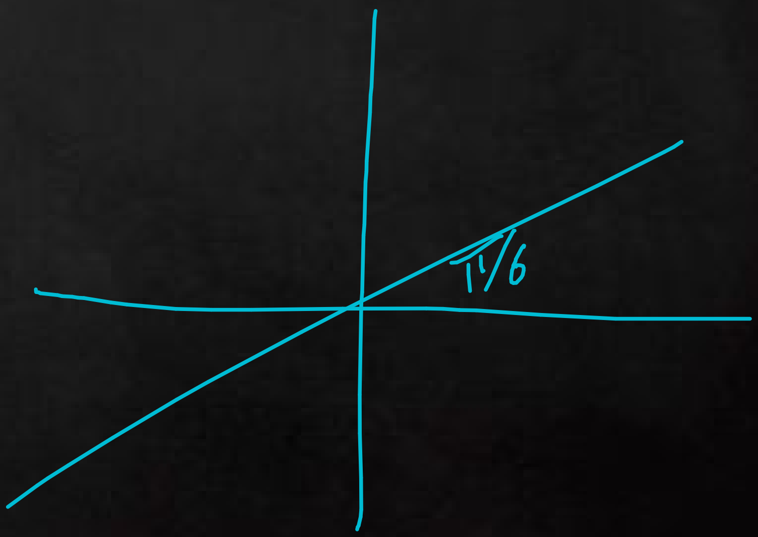
$r + 3 = 0 \vee r - 4 = 0$

$r = -3 \vee r = 4$



c) $\theta = \frac{\pi}{6}$

r	θ
-1	$\frac{\pi}{6}$
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{6}$

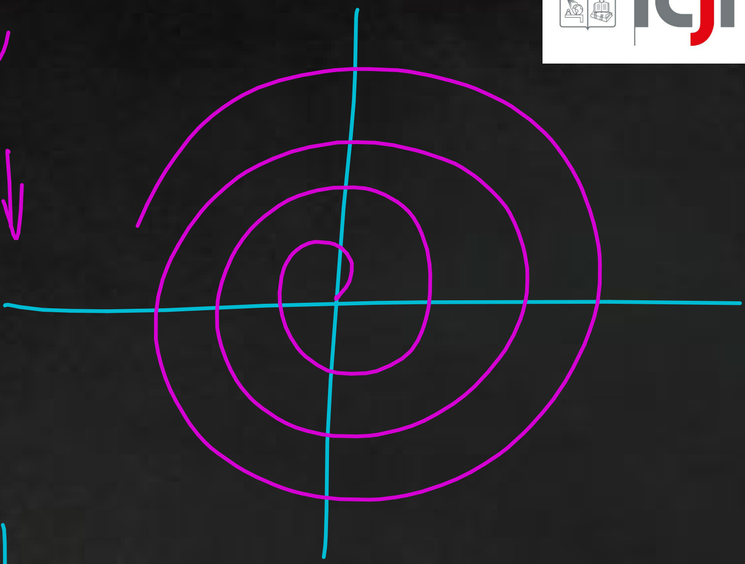


$r = \frac{\theta}{2\pi}$

↑ ↑

$r = r(\theta)$

r	θ
0	0
1	2π
2	4π
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	π



e) $r = \tan(\theta)\sec(\theta)$

$$r = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\,\frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)} = r$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\theta) = r\cos^2(\theta) \quad /\cdot r$$

$$\underbrace{r\,\text{sen}(\theta)}_{y} = \underbrace{r^2\cos^2(\theta)}_{x^2}$$

$$y = x^2$$

↑

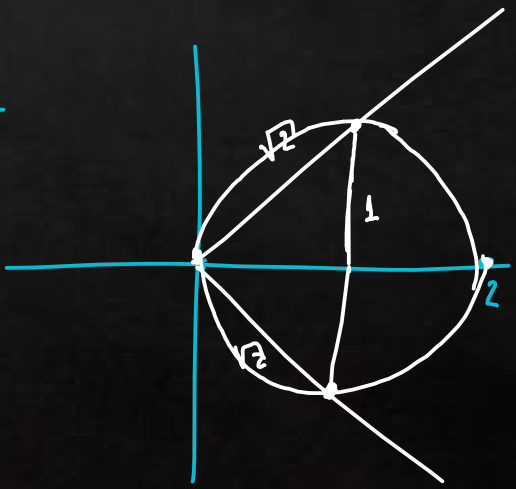
$x = r\cos(\theta)$

$y = r\,\text{sen}(\theta)$

f) $r = 2\cos(\theta)$

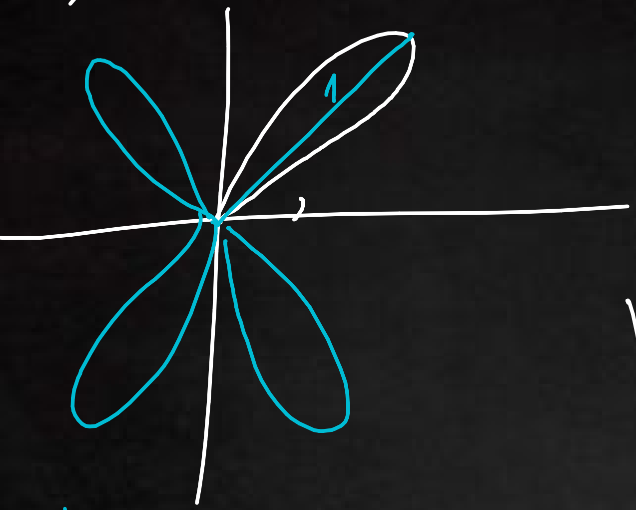
0 $\frac{\pi}{2}$

r	θ
2	0
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-2	π
1	$-\frac{\pi}{3}$



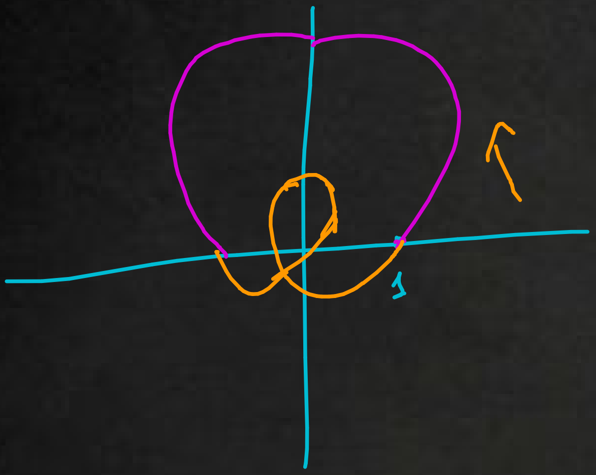
g) $r = \text{sen}(2\theta)$

r	θ
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$



h) $r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta)$

r	θ
1	0
2	$\frac{\pi}{6}$
$2{,}41 \approx 1+\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$2{,}73 \approx 1+\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\frac{\pi}{2}$



$\text{sen}(\theta) \approx \theta$

$r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta)$

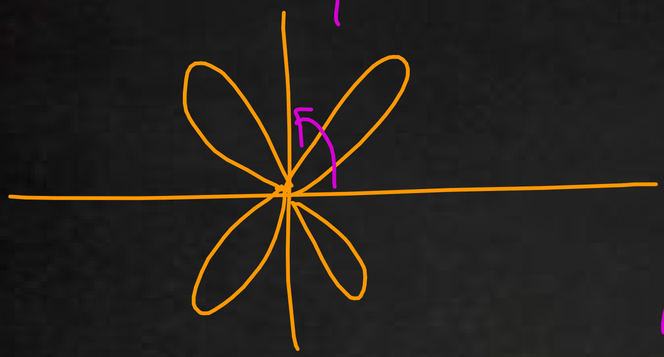
$r \approx 1 - 2\theta$

r	θ
0	$-\frac{\pi}{6}$
$-0{,}41 \approx 1-\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-0{,}73 \approx 1-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$

P3)

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int f^2(\theta)\, d\theta}$$

a) $\rho(\theta) = \text{sen}(2\theta)$



$$A = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(2\theta)\, d\theta\right)$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta$$

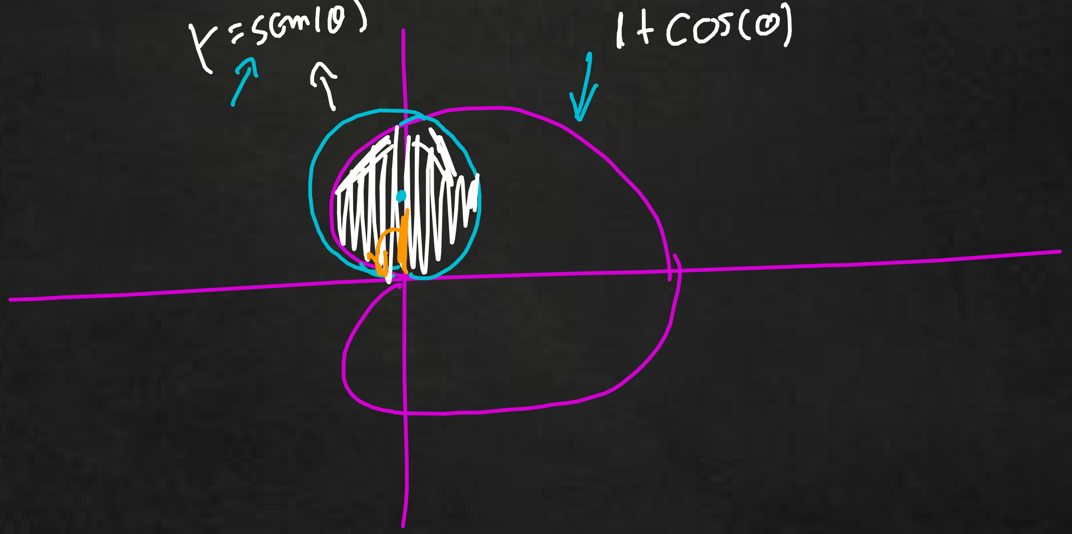
$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\,\text{sen}(4\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

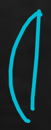
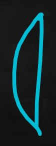
$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot 0 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$s^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$c^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

b)



A' =  +  $= \frac{\pi \frac{1}{4}}{2}$ + 

media circunferencia

cardiode

$$D = \frac{1}{2}\int \rho(\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos(\theta))^2 d\theta$$

$$c^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 + 2\cos(\theta) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \quad d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + 2\left(\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{(\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{3\pi}{8} - 1$$

$$\Rightarrow A_T = D + ($$

$$= \frac{3\pi}{8} - 1 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

P4) $A = \int_a^b f(x)\,dx$

$$2\pi A \cdot X_G \quad \swarrow$$

$$2\pi \cancel{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\cancel{\int_a^b f(x)\,dx}} = 2\pi \int_a^b x\,f(x) = V_{oy}$$

$$\uparrow \; \uparrow \qquad \nearrow$$

$$\longleftarrow$$

$$2\pi A\, Y_G = 2\pi \cancel{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx}{\cancel{\int_a^b f(x)\,dx}}$$

$$= \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = V_{ox}$$

Propuestos[Sección alterna]

1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ y la parábola de ecuación $y=(x-2)^2$.

    a) **Área**
    Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

    b) **Volumen de Revolución**
    Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.

2. Considere la función $f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

    a) **Longitud de Curva**
    Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

    b) **Área del Manto de Revolución**
    Se define la región $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], 0\leq y\leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

    c) **Centro de Gravedad**
    Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

”The air was cold. Taylor”