MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
22 de septiembre de 2021

Auxiliar 4

Auxiliar para el control 1

P1 Sistema de ecuaciones:
Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +x_2 & +(1-2\alpha)x_3 & +(\beta+1)x_4 & = & \beta-3 \\ & x_2 & -x_3 & +(\beta-\alpha)x_4 & = & -1 \\ & -2x_2 & +2x_3 & +(2-2\beta)x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & +\alpha x_4 & = & 4\beta-3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +(\alpha+\beta-1)x_4 & = & 0 \end{array}$$

Determine condiciones sobre α y β para que el sistema:

(i) Tenga infinitas soluciones

(ii) Tenga solución única

(iii) No tenga solución

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & | & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & | & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2-2\beta & | & -2 \\ 2 & 0 & 2 & \alpha & | & 4\beta-3 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha+\beta-1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$f_5' = f_5 - f_1$ y $f_4' = f_4 - f_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2-2\beta & -2 \\ 0 & -1 & 2\alpha+1 & \alpha-\beta-1 & 3\beta \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha-2 & -\beta+3 \end{array}\right)$$

$f_4' = f_4 + f_2$ y $f_3' = f_3 + 2f_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha-2 & -\beta+3 \end{array}\right)$$

$f_5' = f_5 - f_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -4\beta+4 \end{array}\right)$$

Permutar f_3 y f_4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -4\beta+4 \end{array}\right)$$

$f_5' = f_5 + \frac{1}{2}f_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta+2 \end{array}\right)$$

Entonces:

- Si $\beta \neq \frac{1}{2}$, no hay solución independiente del valor de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta+2 \end{array}\right)$$

- Para $\beta = 1/2$: Utilizamos que $\exists!$ solución si la diagonal $\neq 0$, entonces para que exista una única solución $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1-2\alpha & \beta+1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 3\beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta+2 \end{array}\right)$$

- No hay un caso con infinitas soluciones

P2 Espacios vectoriales:

Sea $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los siguientes sub conjuntos de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\}$, $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})| \ Tr(A) = 0\}$, con $Tr(A)$ la función traza de una matriz definida como $Tr(A) : M_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} aii$$

a) Demuestre que W_1 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

b) Demuestre que W_2 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

c) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, demuestre que cualquier elemento de W_2 puede ser escrito como:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) W_1 es sev de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall A, B \in W_1,\ \lambda_1 A + \lambda_2 B \in W_1$
Entonces, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sean $A, B \in W_1$, tenemos que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)_{ij} = \lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}$.
También se tiene que $A \in W_1$ ssi $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} A_{ij} = 0$
Por lo tanto: $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} (\lambda_1 A + \lambda_2 B)_{ij} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} (\lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}) = \lambda_1 \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} A_{ij} + \lambda_2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} B_{ij} = 0$.
Lo que implica que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B) \in W_1$

b) W_2 es sev de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall A, B \in W_2,\ \lambda_1 A + \lambda_2 B \in W_2$
Entonces, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sean $A, B \in W_2$, tenemos que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)_{ij} = \lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}$.
También se tiene que $A \in W_2$ ssi $\sum_{i=1}^{2} A_{ii} = 0$
Por lo tanto: $\sum_{i=1}^{2} (\lambda_1 A + \lambda_2 B)_{ii} = \sum_{i=1}^{2} (\lambda_1 A_{ii} + \lambda_2 B_{ii}) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{2} A_{ii} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{2} B_{ii} = 0$.
Lo que implica que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B) \in W_2$

c) Tenemos que $A \in W_2$ ssi $\sum_{i=1}^{2} A_{ii} = 0$, sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_2$ entonces $a + d = 0$, lo que se puede escribir como $a = -d$, con b, c y d variables libres.
Por lo tanto, podemos escribir A como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ QED

P3 Más espacios vectoriales

a) Sea $P_{n\leq 3}[X] := \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 |\ a_i \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios menores o iguales a 3. Demuestre que $P_{n\leq 3}[X]$ es un espacio vectorial sobre R.
Diremos que $P_{n\leq 3}[X]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ssi se satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, y, z \in P_{n\leq 3}[X]$:
Sean $a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$, para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_{n\leq 3}[X]$, $z = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P_{n\leq 3}[X]$

(EV1) $(\lambda + \beta)y = \lambda y + \beta y$:
$(\lambda + \beta)y = (\lambda + \beta)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda y + \beta y$

(EV2) $\lambda(y + z) = \lambda y + \lambda z$:
$\lambda(y+z) = \lambda(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0) = \lambda(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+\lambda(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0) = \lambda y + \lambda z$

(EV3) $\lambda(\beta y) = (\lambda\beta)y$:
$\lambda(\beta y) = \lambda(\beta(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)) = (\lambda\beta)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\lambda\beta)y$

(EV4) $1 \cdot y = y$:
$1 \cdot (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = y$

b) Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

Demostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$
W es sev de $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in W,\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W$
Sea $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $x \in W$ ssi $Ax = 0$.
Entonces, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sean $x_1, x_2 \in W$, tenemos $Ax_1 = 0$ y $Ax_2 = 0$, por demostrar que: $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0$
Como $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y por distribución de la multplicación frente a la suma, $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(\cancel{Ax_1}) + \lambda_2(\cancel{Ax_2}) = 0$

c) Sea $U_b := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = 5t + b,$ con $b \in \mathbb{R},$ fijo$\}$. ¿Qué condición debe cumplir este conjunto para ser un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?.
U_b es sev de $\mathbb{R}$ ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall a, c \in U_b,\ \lambda_1 a + \lambda_2 c \in U_b$
$a = (x_a, y_a, z_a, t_a)$, $c = (x_c, y_c, z_c, t_c)$
$d = \lambda_1 a + \lambda_2 c = (\lambda_1 x_a + \lambda_2 x_c, \lambda_1 y_a + \lambda_2 y_c, \lambda_1 z_a + \lambda_2 z_c, \lambda_1 t_a + \lambda_2 t_c) = (x_d, y_d, z_d, t_d)$
Sabemos que $z_a = 5t_a + b$, $z_c = 5t_c + b$ y queremos demostrar que $z_d = 5t_d + b$
$z_d = \lambda_1 z_a + \lambda_2 z_c = \lambda_1(5t_a + b) + \lambda_2(5t_c + b) = 5(\lambda_1 t_a + \lambda_2 t_c) + (\lambda_1 + \lambda_2)b = 5t_d + (\lambda_1 + \lambda_2)b$
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, (\lambda_1 + \lambda_2)b = b$, ssi $b = 0$
Por lo tanto la condición que debe cumplir el conjunto es que $b = 0$

P4 Matrices

a) LDU:
Encuentre la descomposición LDU de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Solucion:

$$E_{1,3}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,3}(3)E_{1,3}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \bar{A}$$

Con $E_{1,3}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_{2,3}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = (E_{1,3}(-1)E_{2,3}(3))^{-1}\bar{A}$$

Dejarlo hasta aquí en general bastaria:

$$A = (E_{1,3}(-1)E_{2,3}(3))^{-1}I\bar{A}$$

La inversa de una triangular inferior/superior es triangular inferior/superior.
En el auxiliar lo hice con el método de Gauss, pero se me olvidó invertir lo que quedaba en la parte derecha. Lo siento

Esta es una descomposición LU, para obtener la LDU podemos usar D=I
O también:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que dividir la fila completa (también fallé en eso en el auxiliar) Por lo que finalmente tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $M^tM \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Se define la matriz $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como**

$$P = I - M(M^tM)^{-1}M^t$$

donde I es la identidad de dimensión m. Pruebe que

b.1) $P^2 = P$ **y** $PM = 0$**, donde** 0 **es la matriz nula de dimensión** m**.**
Solucion:

$$\begin{aligned} P^2 &= (I - M(M^tM)^{-1}M^t)(I - M(M^tM)^{-1}M^t) \\ &= (I - M(M^tM)^{-1}M^t) - M(M^tM)^{-1}M^t + M(M^tM)^{-1}M^tM(M^tM)^{-1}M^t \\ &= P - M(M^tM)^{-1}M^t + M\cancelto{I}{(M^tM)^{-1}M^tM}(M^tM)^{-1}M^t \\ &= P - M(M^tM)^{-1}M^t + M(M^tM)^{-1}M^t \\ &= P \end{aligned}$$

$$PM = (I - M(M^tM)^{-1}M^t)M = M - M(M^tM)^{-1}M^tM = M - M\cancelto{I}{(M^tM)^{-1}M^tM} = M - M = 0$$

b.2) Las matrices M^tM y P son simétricas.
Solucion:

$$(M^tM)^t = M^t(M^t)^t = M^tM$$

$$\begin{aligned} P^t &= (I - M(M^tM)^{-1}M^t)^t \\ &= I^t - (M(M^tM)^{-1}M^t)^t \\ &= I - M^t((M^tM)^{-1})^t(M^t)^t \text{ usamos que } M^tM \text{ es simétrica, entonces } ((M^tM)^{-1})^t = (M^tM)^{-1} \\ &= I - M^t((M^tM)^{-1})M \\ &= P \end{aligned}$$

b.3) P **no es invertible (Ind: Argumente que** M **no es nula).**
Por contradicción, suponemos que P es invertible, entonces $\exists P^{-1}$ tal que $P^{-1}P = I$, pero tenemos que $PM = 0$, si multiplicamos por P^{-1}, entonces $P^{-1}PM = 0 = M$, como $M \neq 0$ tenemos una contradicción

Resumen

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes.

- A es invertible
- $\exists!\ x$ solución al sistema homogéneo: $Ax = 0$
- $\forall i,\ \tilde{A}_{ii} \neq 0$ ($\tilde{A}$ es la matriz A escalonada)
- $\forall b, \exists!\ x$ solución al sistema $Ax = b$
- $\forall b, \exists\ x$ solución al sistema $Ax = b$

Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $BA = I$ $\implies A$ es invertible y $B = A^{-1}$

Matriz traspuesta: Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la traspuesta de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(At)_{ij} = a_{ji}$. Esto corresponde a intercambiar el rol de las filas y columnas. Más claramente, la primera fila de A^t es la primera columna de A y así sucesivamente.

Matriz simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es simétrica ssi $A^T = A$
Es fácil verificar que A es simétrica ssi:

$$a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Matriz anti-simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es anti-simétrica ssi $A^T = -A$

Matrices elementales: Definimos la matriz elemental $E_{p,q}(\lambda)$ mediante

$$(E_{p,q}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ \lambda, & \text{si } i = q, j = p \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $E_{p,q}(\lambda)A$ modifica la fila q de A y corresponde a multiplicar la fila p de A por λ y sumarlo a la fila q.
- **Inversa:** $E_{p,q}(\lambda)$ es invertible y $(E_{p,q}(\lambda))^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$.

Matriz de permutación: Definimos la matriz de permutación $I_{p,q}$ mediante:

$$(I_{p,q})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \wedge (i \neq p \vee q) \\ 1, & \text{si } (i = p \wedge j = q) \vee (i = q \vee j = p) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $I_{p,q}A$ permuta las filas p y q de A

ESPACIOS VECTORIALES:

Espacio vectorial Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ssi la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

(EV4) $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$, escalares.

Subespacio vectorial: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi:

- $\forall u, v \in U. u + v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Combinación lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y una colección de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, y de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de estos vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$