MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
27 de septiembre de 2021

Auxiliar 5

Espacios vectoriales

P1 Sea $V \subseteq \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices triangulares superiores. Se define:

$$W = \{A \in V |\text{ la suma de cada fila de } A \text{ es cero}\}$$

a) Pruebe que W es s.e.v. de V .

b) Pruebe que:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de W.

c) Extraiga de G una base para W.

P2 a) Estudie la dependencia lineal de los siguientes conjuntos:

i) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$

ii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

iii) $W = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ en el espacio $\mathcal{F} = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es función}\}$.

b) Sean E, F espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : E \to F$ una función que satisface

(1) $T(0_E) = 0_F$

(2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, T(\alpha x) = \alpha T(x)$

(3) $\forall x, y \in E: \ T(x+y) = T(x) + T(y)$

Considere el conjunto $T(E) = \{y \in F : y = T(x), x \in E\}$.

i) **(Propuesto)** Demuestre que $T(E)$ es s.e.v. de F.

ii) Suponga además que T satisface que $\forall x \in E, T(x) = 0 \implies x = 0$. Muestre que si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq E$ es $l.i.$, entonces $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\} \subseteq F$ es $l.i.$

P3 Para $n \in \mathbb{N}$ se define $P_n(\mathbb{R})$ como el e.v de los polinomios con grado menor o igual a n a coeficientes reales. Sea: $V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : \exists q(x) \in P_1(\mathbb{R}), p(x) = q(x)(x^2+5)\}$

a) Encuentre una base de V

b) Calcule $dim(V)$

Resumen

Espacio vectorial Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ssi la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

(EV4) $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$, escalares.

Subespacio vectorial: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi:

- $\forall u, v \in U. u + v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Combinación lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y una colección de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, y de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de estos vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Dependencia e independencia lineal Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** (*l.d.*) si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** (*l.i.*).

Generadores de un e.v. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $v_1, \ldots, v_n \subseteq V$, generan V si y sólo sí:

$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v \in V, \exists\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}, \text{ tal que } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Base Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base de V si y sólo sí:

(1) $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto *l.i.*

(2) $V = \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$

Teorema. Si $X = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $B = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ que es base de V .

Teorema Supongamos que tenemos $B = \{v_i\}_{i=1}^n$, base de V y un conjunto arbitrario $X = \{w_i\}_{i=1}^m \subseteq V$. Si $m > n$, entonces el conjunto X es *l.d.*

Dimensión Sea V espacio vectorial, sea B base de V, $dim(V) = \#B = n$, con n finita (si n es infinita, entonces la dimensión de V es infinita)