MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
9 de noviembre de 2021

Resolución Auxiliar 10: Preparación Control 2

P1: [C2: 2009-02] Sea V un espacio vectorial con base $B = \{u, v, w\}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T(u) = v - w$; $T(v) = u + v$; $T(w) = u + 2v - w$

a) Determine la matriz representante de T, $M_{BB}(T)$, con respecto a las bases B y B.

$$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Sea L el subespacio vectorial de V generado por el vector $x = 2u + 3v - w$. Encuentre los siguiente subespacios y sus dimensiones:

- $T(L)$
  $T(L) := \{y \in V : y = T(x) \wedge x \in L\}$

$$T(x) = M_{BB}(T)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Por lo tanto $T(L) = L = \langle\{2u + 3v - w\}\rangle$ y $dim(T(L)) = 1$
- $L \cap Ker(T)$
  $L \cap Ker(T) := \{x \in V : x \in L \wedge x \in Ker(T)\}$
  $x \in L \iff x = \lambda(2u + 3v - w)$; $x \in Ker(T) \iff T(x) = 0$.
  Como $T(x) = x$ para $x \in L$, entonces $x \in L \cap Ker(T) \implies x = 0$. $dim(L \cap Ker(T)) = 0$
- $L + Ker(T)$:
  $L + Ker(T) := \{a \in V : a = x + b, x \in L \wedge b \in Ker(T)\}$
  Como $L \cap Ker(T) = \{0\}$, entonces $L + Ker(T) = L \oplus Ker(T)$, por lo que $dim(L + Ker(T)) = dim(L) + dim(Ker(T))$ y una base de $L + Ker(T) =$ base de $L \cup$ base de $Ker(T)$
  $x \in Ker(T) \iff T(x) = 0 \iff M_{BB}(T)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

  De donde $x_1 = x_2 = -x_3$ y $x_3 = x_3$ variable libre.
  Entonces $Ker(T) = \langle\{u + v - w\}\rangle$
  $\implies L + Ker(T) = \langle\{2u + 3v - w, u + v - w\}\rangle$ y $dim(L + Ker(T)) = 2$
- $Im(T)$
  $Im(T) := \{y \in V : y = T(x), x \in V\}$

$$M_{BB}(T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}x_3$$

Y por teorema núcleo imagen: $dim(V) = dim(Im(T)) + dim(Ker(T))$, $dim(V) = 3$, $dim(Ker(T)) = 1$, por lo tanto $dim(Im(T)) = 2$, por lo que hay que escoger 2 elementos l.i. para conformar la base de la imagen.
$Im(T) = \langle\{v - w, u + v\}\rangle$

P2: [C2: 2012-03] Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Se definen los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : -p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

a) Pruebe que U y V son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
p(x) = ax^2 + bx + c \in U &\iff p(x) = p(-x) \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c) \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff ax^2 - bx + c = ax^2 - b + c \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff a = a \wedge b = -b \wedge c = c \\
&\iff b = 0
\end{aligned}$$

$\therefore U := \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(x) = ax^2 + c \text{ con } a, c \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
p(x) = ax^2 + bx + c \in V &\iff -p(x) = p(-x) \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff -(ax^2 + bx + c) = a(-x)^2 + b(-x) + c \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff -ax^2 - b - c = ax^2 - bx + c \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff -a = a \wedge b = b \wedge -c = c \\
&\iff a = 0 \wedge c = 0
\end{aligned}$$

$\therefore V := \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(x) = bx \text{ con } b \in \mathbb{R}\}$
Notemos que $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ y $U \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,$V \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ trivialmente.
U es sev de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \iff \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U, \forall u_1, u_2 \in U \wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$u_1 = a_1x^2 + c_1, u_2 = a_2x^2 + c_2$ y $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1(a_1x^2 + c_1) + \lambda_2(a_2x^2 + c_2) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x^2 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = a_3x^2 + c_3 \in U$, con $a_3, c_3 \in \mathbb{R}$
Por lo tanto U es sev de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
V es sev de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \iff \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V, \forall v_1, v_2 \in V \wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$v_1 = b_1x, v_2 = b_2x$ y $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(b_1x) + \lambda_2(b_2x) = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)x = b_3x \in V$, con $b_3 \in \mathbb{R}$
Por lo tanto V es sev de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

b) Muestre que $B = \{1 + x^2, , 1 - x^2\}$ es una base de U Para demostrar que B genera U tenemos que demostrar que los elementos de B son l.i. y que B genera U:

LI: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\alpha(1 + x^2) + \beta(1 - x^2) = 0,$$

entonces en particular, para $x = 1$:

$$2\alpha = 0 \implies \alpha = 0$$

y para $x = 0$ y $\alpha = 0$

$$\implies \beta = 0$$

$$\therefore \alpha(1 + x^2) + \beta(1 - x^2) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \implies \alpha = \beta = 0$$

Por lo tanto B es l.i.

Generación: Opción 1: Notamos que la combinación lineal de elementos de B, nos da un elemento de U.

$$\alpha(1+x^2)+\beta(1-x^2)=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)x^2=\gamma+\delta x^2$$

Opción 2: La base canónica de U tiene 2 elementos $\{1,x^2\}$ y como demostramos l.i. anteriormente y tenemos 2 elementos, entonces es base.

c) Encuentre una base de V y determine su dimensión
. $V=bx, b\in\mathbb{R}$, por lo tanto $\{x\}$ es base y tiene dimensión 1

d) Pruebe que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})=U+V$
Hay que probar que cualquier elemento de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ puede ser escrito como suma de un elemento de U y un elemento de W. Y en efecto:

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}=\underbrace{(ax^2+c)}_{\in U}+\underbrace{bx}_{\in V}$$

e) Determine si $U+V$ es suma directa (Esto es, si $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})=U\oplus V$).
$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})=U\oplus V \iff U+V\wedge U\cap V=\{0\}$
Opción 1: $p(x)\in U\cap V \implies p(x)=0$ $(p(x)\in U \iff b=0\wedge p(x)\in V \iff a=0,c=0)$
Opción 2: $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))=3, dim(U)=1$ y $dim(V)=2$, por lo tanto $dim(U\cap V)=0$

P3: [C2: 2017-02] Pruebe o de un contraejemplo en cada caso:

a) Existe una única transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to R^3$ tal que:

$$Ker(T)=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

y además

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Una transformación lineal está totalmente definida si sabemos lo que pasa con la base del espacio de salida, es decir que si existe, entonces es única: Tenemos que $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (propuesto demostrarlo), por lo tanto solo nos falta ver que la transformación lineal está bien definida y en efecto:

$$T\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

b) Toda transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

es biyectiva. Falso:

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Tiene $Ker(T)=2$, por lo que no puede ser biyectiva

c) Existe una transformación lineal y biyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{22}$.
No, ya que $dim(R^2) = 2$ y $dim(\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) = 4$ y como $dimdim(R^2) < dim(\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}))T$ no puede ser epiyectiva.

d) Existen dos subespacios vectoriales U, V **de** $\mathbb{R}^4$ **de dimensión 2 tal que** $U \oplus V = \mathbb{R}^4$

Verdadero: $U = \langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \rangle$ y $V = \langle \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \rangle$. Claramente $\mathbb{R}^4 = U + V$ y $U \cap V = \{0\}$

Resumen

Def-proposición (Subespacio vectorial) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. $U \neq \emptyset$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2 \in U, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$.
Definicion: l.i. l.d. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son linealmente dependientes (l.d.) ssi: existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, son (l.i.)
Def: Base Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $vi_{i=1}^n$ es una base de V ssi: $vi_{i=1}^n$ es (l.i.) y genera el espacio.
Definición (Núcleo) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos el núcleo de T como el conjunto:

$$KerT = \{x \in U | T(x) = 0\}.$$

Definición (Imagen) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos la imagen de T como el conjunto:

$$ImT = T(U) = \{v \in V | \exists u \in U : v = f(u)\}$$

Def: Dimensión Cardinalidad de la base
Def: Rango y Nulidad Rango=dim(Im(T)) Nulidad=dim(Ker(T))
Definición (Suma directa) Sea un espacio vectorial V y dos subespacios vectoriales U, W de V . Diremos que el subespacio $Z = U + W$ es suma directa de U y W, notado $U \oplus W = Z$, si $\forall v \in Z, v$ se escribe de manera única como $v = u + w, u \in U, w \in W$.
Prop. Suma directa $Z = U \oplus W$ ssi $U \cap W = \{0\} \wedge U + W = Z$
Teorema del núcleo imagen (TNI):
Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $dimU < \infty$. Entonces:

$$dimU = dimKerT + dimImT$$

. **Teorema 3.4. Sea $T : U \to V$ aplicación lineal**.

1. Si $dimU = dimV$ entonces T inyectiva $\iff$ T epiyectiva $\iff$ T biyectiva.
2. Si $dimU > dimV$ T no puede ser inyectiva.
3. Si $dimU < dimV$ T no puede ser epiyectiva.
4. Como conclusión de (2) y (3) U isomorfo a $V \iff dimU = dimV$.

Matriz representante:

Sea $T\colon U \to V$ lineal y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz obtenida de los coeficientes en la descomposición de cada $T(u_i)$ en la base β_V. Concretamente,

$$\begin{array}{ccccccc} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + \cdots + & a_{m1}v_m \\ T(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & + \cdots + & a_{m2}v_m \\ \vdots & & & & & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & + \cdots + & a_{mn}v_m \end{array} \implies M_{\beta_U \beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Composición:

Sean $T\colon U \to V$, $L\colon V \to W$ lineales y $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ bases de U, V, W respectivamente. Entonces

$$M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V \beta_W}(L) M_{\beta_U \beta_V}(T).$$

En particular si tenemos dos bases $\alpha, \overline{\alpha}$ de U y $\beta, \overline{\beta}$ de V, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U, \alpha \arrow[r, "M_{\alpha\beta}(T)"] \arrow[d, "M_{\alpha\overline{\alpha}}(id_U)"'] & V, \beta \\ U, \overline{\alpha} \arrow[r, "M_{\overline{\alpha\beta}}(T)"'] & V, \overline{\beta} \arrow[u, "M_{\overline{\beta}\beta}(id_V)"'] \end{tikzcd}$$