Inicio: 12:02

Resumen últimas 2 semanas

Transformaciones lineales

$T: U \to V$ es lineal si y solo si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, u_1, u_2 \in U$,

$$\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) = T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

En particular

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(u_i)$$

Si T es biyectiva se llama isomorfismo y $T^{-1}: V \to U$ también es lineal

Son lineales:

1. La suma de dos lineales $T, T': U \to V$.
2. La ponderación de una lineal por constante
3. La composición de dos lineales $T: U \to V$, $S: V \to W$. $S \circ T: U \to W$ es lineal.

Transformaciones lineales más importantes

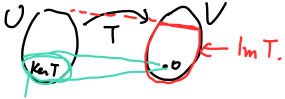
1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, la transformación 'Multiplicar por A'. $T_A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ dada por $T_A(x) = Ax$ es lineal.
2. Sea $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U. La transformación que a cada $v \in U$ le asocia $(v)_\beta \in \mathbb{K}^n$ es isomorfismo. $U \cong \mathbb{K}^n$.

Ejercicios importantes:

1. Demostrar que una transformación es lineal.
2. Demostrar que una transformación no es lineal.
3. Sean $T, T': U \to V$ lineales y X generador de U. Mostrar que si $T(u) = T'(u)$ para todo $u \in X$, entonces T y T' son iguales.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 y$



Espacios vectoriales asociados a $T: U \to V$

Núcleo: Ker $T = T^{-1}(\{0\})$ s.e.v. U

Imagen: Im $T = T(U)$ s.e.v. V

Teorema Núcleo Imagen TNI

Si $T: U \to V$ lineal.

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

$X = \{x_1, \dots, x_k\}$

Sea $T: U \to V$ lineal, $X \subseteq U$.

1. $\langle T(X) \rangle = T(\langle X \rangle)$.
   Ej: Si X base de U $<T(X)> = T(U)$.
2. X l.i. y T inyectiva $\implies$ $T(X)$ l.i.
   $\{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_k)\}$

Sea $T: U \to V$ lineal.

1. T inyectiva $\iff$ Ker $T = \{0\}$.
2. T epiyectiva $\iff$ Im $T = V$.
3. Si $\dim(U) = \dim(V)$, entonces
   T iny. $\iff$ T epi. $\iff$ T isom.

Sea $T: U \to V$ lineal.

1. T inyectiva $\implies$ $\dim(U) \leq \dim(V)$.
2. T epiyectiva $\implies$ $\dim(U) \geq \dim(V)$

Ejercicios importantes:

1. Encontrar (base de) Ker T, y Ker T_A.
   Ker A
2. Encontrar (base de) Im T, y Im T_A.

(1) Sea $a \in <T(X)> \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(x_i)$

$\Rightarrow a = T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \in T(<X>)$

Ej: $T = T_A$ $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A es invertible $\Leftrightarrow [Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0]$
(T_A isomorfismo) (Ker $T_A = \{0\}$)

$\Leftrightarrow [Ax = y$ tiene solución para todo $y]$
(T_A epiyectiva)

Sea $T\colon U \to V$, $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U, $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de V.

ej: $(T(v_1))_\beta = M_{\alpha\beta}(T)\cdot v_1$.

Matriz representante $M_{\alpha\beta}(T)$

Matriz en $\mathcal{M}_{\dim(V),\dim(U)}(\mathbb{K})$.

j-ésima columna $= (T(u_j))_\beta$.

Para escribirla directamente Escribir:

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,m}v_m \\
T(u_2) &= a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,m}v_m \\
&\ \vdots \\
T(u_n) &= a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \cdots + a_{n,m}v_m
\end{aligned}
$$

Entonces, $M_{\alpha,\beta}(T) = A^T$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & \\
a_{12} & a_{22} & \\
\vdots & \vdots & \\
a_{1m} & a_{2m} &
\end{bmatrix}
$$

Ejemplo importante:

Si $T = T_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ y α, β son bases canónicas, entonces $M_{\alpha,\beta}(T_A) = A$.

Propiedades

1. Matriz representante de suma de transformaciones lineales $=$ suma de las matrices representantes.
2. Matriz representante de ponderación de transformaciones lineales $=$ ponderación de matriz representante.
3. $T\colon U \to V, S\colon V \to W$, $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ bases $M_{\beta_U,\beta_W}(S \circ T) = M_{\beta_V,\beta_W}(S) \cdot M_{\beta_U,\beta_V}(T)$-
4. T biyectiva si y solo si $M_{\alpha\beta}(T)$ invertible. Además $M_{\beta,\alpha}(T^{-1}) = (M_{\alpha,\beta}(T))^{-1}$

Ejercicios importantes:

1. Encontrar matriz representante de T_A en bases distintas a las bases canónicas.
2. Encontrar matriz representante de T en cualquier base.
3. Encontrar matriz representante de inversa de T.

Nuevo material

Matrices semejantes y teorema de cambio de base

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}$ son semejantes si existen matrices P y Q tales que $B = PAQ$.

INVERTIBLES

$P^{-1} B Q^{-1} = A$

OJO: Ser semejantes es relación de equivalencia.

(Mini) Teorema

Sean α, α' bases de U, β, β' bases de V, y $T : U \to V$. Entonces $\underbrace{M_{\alpha,\beta}(T)}_{A}$ y $\underbrace{M_{\alpha',\beta'}(T)}_{B}$ son semejantes. De hecho

$$\underbrace{M_{\alpha',\beta'}(T)}_{B} = \underbrace{M_{\beta,\beta'}(\mathrm{id}_V)}_{P} \underbrace{M_{\alpha,\beta}(T)}_{A} \underbrace{M_{\alpha',\alpha}(\mathrm{id}_U)}_{Q}$$

P invertible pues id_V es biyectiva

Q inv. pues id_U es biyectiva

$$T = id_V \circ T \circ id_U$$

$$M_{\alpha',\beta'}(T) = M_{\beta,\beta'}(id_V) \cdot M_{\alpha,\beta}(T) \cdot M_{\alpha',\alpha}(id_U)$$

α' ↑ U, β' ↓ V

De ahora en adelante, todo es con matrices.

Sea $\boxed{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$. Definimos

$\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$

Ker A = Ker T_A

Im A = Im T_A = $\boxed{\langle\{A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}\}\rangle}$ $= \{y \in \mathbb{K}^m : \exists x,\ y = Ax\}$

$r(A) = \dim(\text{Im } A)$ (rango)

$= \#$ columnas l.i. de A.

si

$y = Ax$

$y = x_1 \cdot A_{\cdot 1} + x_2 A_{\cdot 2} + \ldots + x_n A_{\cdot n}$

$y \in \langle\{A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, \ldots, A_{\cdot n}\}\rangle$

Ejercicio importante 2.

Sean A, Q matrices con Q invertible.
Demostrar que $r(AQ) = r(A)$.

Propuesto

Ejercicio importante 1.

Sean A, P matrices con P invertible.
Demostrar que $r(PA) = r(A)$.

Demostración: $\beta = \{v_1, \ldots, v_r\}$

Sea β base de Im A. Luego $\langle T_P(\beta)\rangle = T_P(\langle\beta\rangle)$

$= T_P(\text{Im } A)$

$= T_P(T_A(\mathbb{K}^n))$

$= T_P \circ T_A(\mathbb{K}^n)$

$= T_{PA}(\mathbb{K}^n)$

$= \text{Im}(PA)$.

$|\beta| = r(A)$.

$T_P(\beta) = \{Pv_1, Pv_2, \ldots, Pv_r\}$

es generador de $\text{Im}(PA)$.

Como P es invertible

T_P es inyectiva

$\Rightarrow T_P(\beta)$ es l.i. (β es l.i.)

$\therefore T_P(\beta)$ base de $\text{Im}(PA)$

es decir

$\dim(\text{Im}(PA)) = r$

$= |\beta|$

$= \dim(\text{Im } A)$

$= r(A)$.

$r(PA)$

Matrices Semejantes y Forma de Hermite

$B = PAQ$

De los ejercicios anteriores sabemos que si A es semejante a B entonces $r(A) = r(B)$.
Vamos a probar que de hecho, si dos matrices tienen igual rango e igual tamaño, entonces son semejantes. Probaremos algo más fuerte.

Forma Normal de Hermite

Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si $r(A) = r$ entonces A es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} \boxed{I_r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

$$m=3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración (parte 1).

$\dim(\mathbb{K}^n)$ $\quad \dim(\text{Im } T_A)$. $\quad n = 5$, $r = 2$

$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Del TNI, $\dim(\text{Ker } T_A) = n - r$.
Sea $\beta = \{\underbrace{w_1, \ldots, w_r}_{\text{extras.}}, \underbrace{u_1, \ldots, u_{n-r}}_{\text{base del Ker } T_A}\}$ base de U obtenida extendiendo una base $\{u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ de Ker T_A
Probemos que $\{Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_r\}$ es l.i.

En efecto: $\lambda_1 Aw_1 + \lambda_2 Aw_2 + .. + \lambda_r Aw_r = 0$ es combinación de vectores en la imagen de T_A

$A(\underbrace{\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r}) = 0 \in \text{Im } A.$

$\Rightarrow \quad \in \text{Ker } A.$

$\Rightarrow \exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-r}$ tq $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r = \gamma_1 \cdot u_1 + \gamma_2 \cdot u_2 + \ldots + \gamma_{n-r} u_{n-r}$

$\rightarrow 0 = \lambda_1 w_1 + .. + \lambda_r w_r - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \ldots - \gamma_{n-r} u_{n-r}$

0 se escribe de manera única en β. $\Rightarrow$ Todos los λ son 0

Continuación

Tenemos $\beta = \{w_1,\dots,w_r,\overbrace{u_1,\dots,u_{n-r}}^{\operatorname{Ker} A}\}$ base de $\mathbb{K}^n$ (espacio de partida)

Como $\{Aw_1,\dots,Aw_r\}\subseteq \mathbb{K}^m$ (llegada) es l.i. se puede extender a una base

$$\beta' = \{v_1,\dots,v_r,\underbrace{z_1,\dots,z_{m-r}}_{\text{vectores extra}}\} \text{ base de } \mathbb{K}^m.$$

$$v_i = Aw_i$$

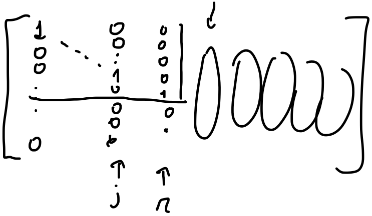
Escribamos $M_{\beta,\beta'}(T_A)$

$$(T_A(w_1))_{\beta'} = (Aw_1)_{\beta'} = (v_1)_{\beta'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$(T_A(w_j))_{\beta'} = (v_j)_{\beta'} = e_j$$

$$(T_A(w_r))_{\beta'} = (v_r)_{\beta'} = e_r$$

$$(T_A(u_i))_{\beta'} = (Au_i)_{\beta'} = (0)_{\beta'} = 0$$



$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ M_{\beta,\beta'}(T_A) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

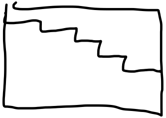
Como A y $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ son ambas matrices rep. de T_A (en distintas bases) son semejantes

Consecuencias de la forma normal de Hermite

1. $\boxed{r(A) = r(A^t)}$
2. El rango de A es el número de columnas l.i. de A.
3. El rango de A es el número de filas l.i. de A.
4. El rango de A es el número de pivotes (escalones) al escalonar A.

Probamos 1. llamamos $H_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad H_r^t \neq H_r$ $\quad \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

A



$A = PH_rQ$, P, Q ~~biyectivas~~ invertible.

$A^t = Q^t H_r^t P^t \Rightarrow A^t$ semejante a H_r^t

$\Rightarrow r(A^t) = r(H_r^t) = r$

Valores y Vectores Propios de una transf. lineal cuadrada

Sea $L: V \to V$ lineal. Un vector $x \in V$ se dice **vector propio de L asociado a $\lambda \in \mathbb{K}$** si $x \neq 0$ y $L(x) = \lambda x$.
El valor λ se dice valor propio de L

Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Un vector $x \in \mathbb{K}^n$ se dice **vector propio de A asociado a $\lambda \in \mathbb{K}$** si $x \neq 0$ y $Ax = \lambda x$.
El valor λ se dice valor propio de A

Los valores y vectores propios son objetos importantes para muchas áreas de la matemática y tienen muchas aplicaciones en ingeniería.

Ejemplo

Encuentre un vector propio asociado al valor propio 5 de la matriz $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observación: Solo decimos que λ es valor propio de L (o A) si existe un vector propio asociado a λ.

Observaciones importantes

Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Son equivalentes:

1. λ es valor propio de A.
2. $\exists x \neq 0,\ Ax = \lambda x$.
3. $\exists x \neq 0,\ (A - \lambda I)x = 0$.
4. Ker $(A - \lambda I)x \neq \{0\}$
5. $A - \lambda I$ es de rango completo.
6. $A - \lambda I$ es invertible.

Consecuencia: Si λ es valor propio de A entonces los vectores propios asociados a λ son exactamente los valores no nulos del espacio $W_\lambda =$ Ker $(A - \lambda I)$.

¿Cómo encontrar valores propios? Determinante

Sabemos testear cuando una matriz es invertible. Pero nos gustaría tener una herramienta eficaz para determinar el conjunto de todos los λ tales que $A - \lambda I$ es invertible. Para esto necesitaremos el concepto de determinante y de submatriz

Submatriz

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Llamamos A^{ij} a la matriz obtenida al borrar la fila i y la columna j de A.

Determinante de una matriz cuadrada

1. Si $A = (a)$ es de 1×1 entonces $|A| = a$.
2. Si A es de $n \times n$ con $n \geq 2$ entonces (determinante por primera columna)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} |A^{i1}|.$$

Ejemplos:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right| =$$

Si D es matriz diagonal. Entonces $|D| =$