Auxiliar 5

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Sea D una región del plano tal que ∂D se puede parametrizar como una curva cerrada, simple, y regular, en sentido antihorario. Pruebe que el área de la región D, $A(D)$, satisface la siguientes relaciones

$$A(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} x dy - y dx; \tag{1a}$$

$$A(D) = \int\limits_{\partial D} y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) dy - x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx; \tag{1b}$$

$$A(D) = \int\limits_{\partial D} x dy. \tag{1c}$$

P2. La curva Folium de Descartes se puede definir como el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 3xy\}$.

(a) Calcule el área que encierra la curva Folium en el primer cuadrante.

(b) Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = (x^3y^4, x^4y^3 - x, 0)$. Calcule el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en el primer cuadrante de la curva Folium.

Hint: Use la parametrización $y = tx$

P3. Considere un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que en coordenadas cilíndricas está dado por la expresión

$$\mathbf{F}(\rho, \theta, z) = z\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + r^2\hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Dada una curva Γ mostrada en la Figura 1 se le pide calcular el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en Γ.

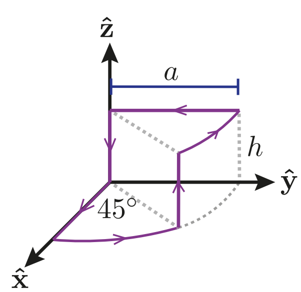

Figure 1: Curva Γ

P4. [Propuesto] Considere el campo dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right). \tag{3}$$

(a) Muestre que el campo de la Ec. (3) se puede escribir en coordenadas cilíndricas como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{\theta}} + z\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

(b) Si Γ es la intersección entre entre una esfera centrada en el origen de radio R y el plano $z = H$, calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ considerando la orientación positiva de Γ mirandola desde arriba.

(c) ¿Es $\mathbf{F}$ un campo conservativo? Justifique su respuesta.

P5. [Propuesto] Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial posición, y $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Demuestre que se cumple

$$\iint\limits_S \mathbf{u}_0 \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \text{ es una superficie cerrada} \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{\partial S} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} & \text{si} \quad \partial S \text{ es una curva cerrada} \end{cases} \tag{5}$$