Auxiliar 10

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. La función $\mathrm{rect}(x)$ es ampliamente utilizada en ingeniería y ciencias. Es por ejemplo la manera analítica de representar un pozo potencial en mecánica cuántica. Su definición está dada por la expresión

$$\mathrm{rect}(\tfrac{x}{\ell}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]; \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]. \end{cases} \tag{1}$$

Calcule su transformada de Fourier.

P2. Buscamos resolver el siguiente problema en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0; \tag{2a}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2c}$$

Este problema corresponde a la situación física de propagación de ondas en una cuerda de longitud infinita. Considere que dada una función $v(x,t)$, se puede calcular su transformada de Fourier con respecto a la variable x y la denotaremos como

$$\hat{v}(k,t) = \mathcal{F}\{v(x,t)\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} v(x,t) dx. \tag{3}$$

De aquí en adelante, suponga que $u(x,t)$ es solución del problema en derivadas parciales (2), y que $\hat{u}(k,t)$ es su transformada de Fourier c/r a la variable x.

(a) Aplicando transformada de Fourier a la Ec. (2a), muestre que la solución general en el espacio de Fourier está dada por

$$\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(\alpha t) + B(k)\sin(\alpha t), \tag{4}$$

y determine cuanto vale α.

(b) Aplicando las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (2b) y (2c), muestre que se cumple $A(k) = \hat{f}(k)$, $B(k) = \frac{\hat{g}(k)}{ck}$.

(c) concluya que la solución al problema (2), considerando sus condiciones iniciales, está dada por

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \tag{5}$$