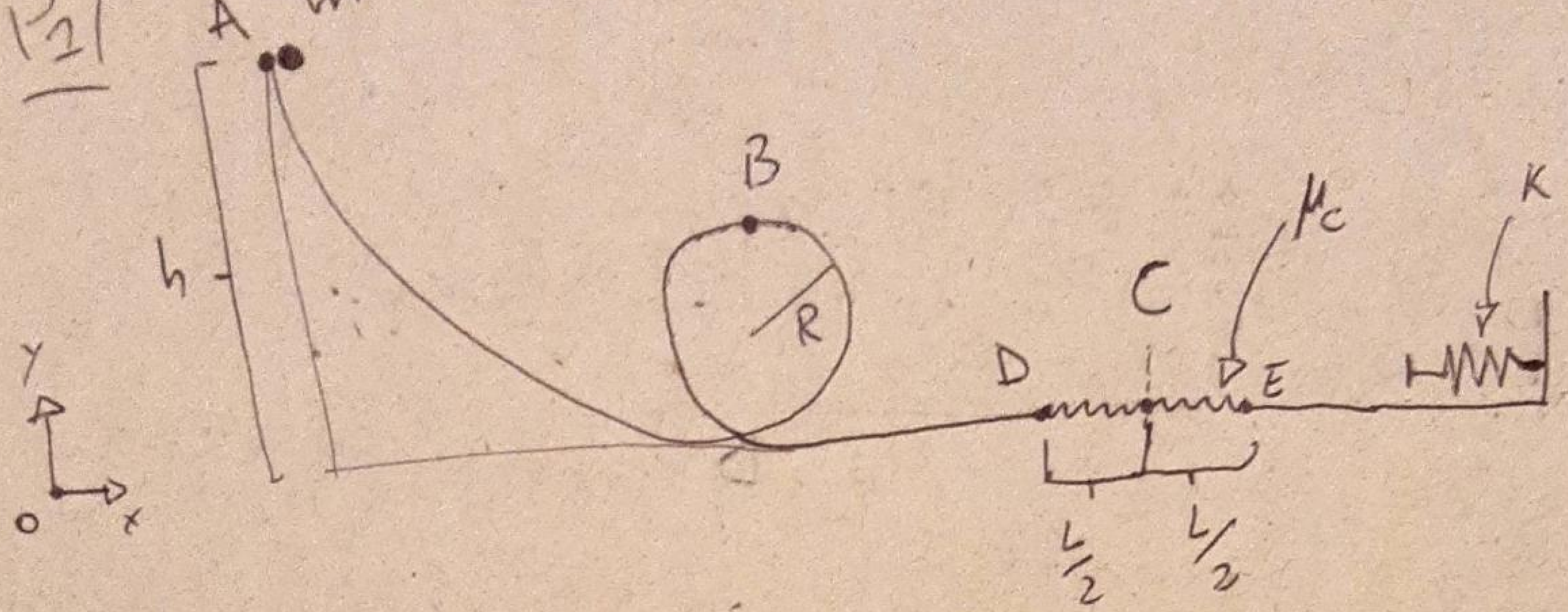
Pauta Aux #12

P1/



a) Primero que todo fijamos el nivel de $U_g = 0$ en el suelo.
Conservamos la energía en los puntos A y B

$$\Rightarrow \Delta E_{AB} = 0$$

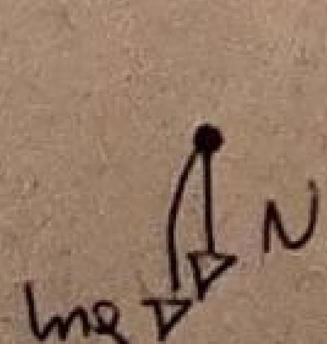
$$\Rightarrow E_A = E_B$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \cancel{m}g2R$$

$$gh = \frac{1}{2}v_B^2 + g2R$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g}v_B^2 + 2R \quad (1)$$

DCL de m en B



$$\Rightarrow -N - mg = -m a_c$$

* a_c es la aceleración centrípeta, cumple $a_c = \frac{-v_B^2}{R}$.

** h es la altura mínima tq m no se despega del riel, i.e. en B se cumple $N=0$.

→ Con estos dos condiciones la ecuación de movimiento queda

$$-\cancel{N}^{0} - mg = -ma_c$$

$$mg = m\frac{v_B^2}{R} \Rightarrow \boxed{v_B^2 = gR} \quad (2)$$

b)

Usando (2) en (1)

$$h = \frac{1}{2g}v_B^2 + 2R = \frac{1}{2g}gR + 2R \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{2}R}$$

c) Conservemos la energía en los puntos A y D para saber con qué velocidad m entra a la zona de frenado.

$$\Delta E_{AD} = 0$$

$$\rightarrow E_A = E_D$$

$$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_D^2$$

$$g\cdot\frac{5}{2}R = \frac{1}{2}v_D^2 \Rightarrow v_D^2 = 5Rg \quad (3)$$

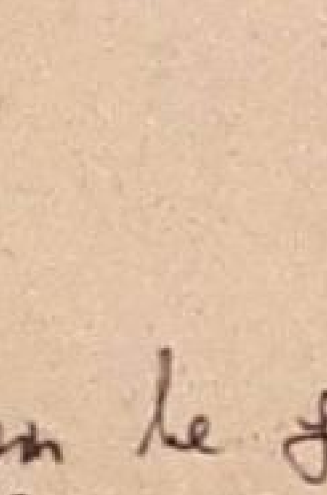
• Para proseguir, queremos encontrar la rapidez con la que sale la partícula de la zona de frenado. Esto se puede hacer de dos formas: utilizando el Teorema del trabajo y Energía: $\Delta E = W_{NC}$, donde W_{NC} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, la otra forma es utilizar cinemática + dinámica. Veamos el primer caso.

c.1) Queremos ver la diferencia de Energía entre los puntos $\overset{\text{inicial}}{D}$ y $\overset{\text{final}}{E}$:

$$\Delta E_{DE} = W_{NC}$$

$$E_f - E_i = E_E - E_D = \vec{F}_r\cdot\vec{d}$$, solo nos importa la energía cinética en este caso.

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = -\mu N L$$, haciendo un DCL



$$\Rightarrow \quad y|\ N - mg = 0$$

$$x|\ -F_r = ma_x$$

$$\boxed{\Rightarrow N = mg \quad y \quad a_x = -\mu g} \quad (*)$$

usando (*) y (3)

$$\frac{m}{2}v_E^2 = \frac{1}{2}m\cdot 5Rg - \mu mgL$$

$$\Rightarrow v_E^2 = 5Rg - 2\mu gL \quad (4)$$

(c2) el otro camino consiste en utilizar la fórmula de cinemática $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$, en conjunto con (*) y (3). Donde $v_f = v_E$ y $v_i = v_D$, entonces

$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$, Por (*) $a = -\mu g$ y $d = L$ (Zona donde ocurre la desaceleración)

$v_E^2 = v_D^2 + 2(-\mu g)L$

$v_E^2 = 5Rg - 2\mu g L$, mismo resultado.

- Continuando, después que m sale de la zona rugosa, rebota con el resorte y vuelve entrar a la zona de frenado, donde finalmente se detiene.

Como no hay fuerzas disipativas entre E y el Resorte, m volverá a entrar con la misma velocidad ~~con~~ con la que salió de la zona de frenado. Así:

$v_f = 0, \quad v_i = -v_E, \quad a = -\mu g, \quad d = L/2$

$\Rightarrow v_f^2 = v_i^2 \pm 2ad$.

$\Rightarrow 0 = (-v_E)^2 + 2(-\mu g)L/2$

$\Rightarrow v_E^2 = \mu g L$ (5)

igualando (4) y (5)

$\Rightarrow 5Rg - 2\mu g L = \mu g L \Rightarrow \boxed{L = \frac{5}{3}\frac{R}{\mu}}$ (6)

d) Conservamos la energía en el punto E (cuando m sale por primera vez) y en el punto F, cuando el resorte alcanza su máxima compresión δ.

$\Rightarrow E_E = E_F$

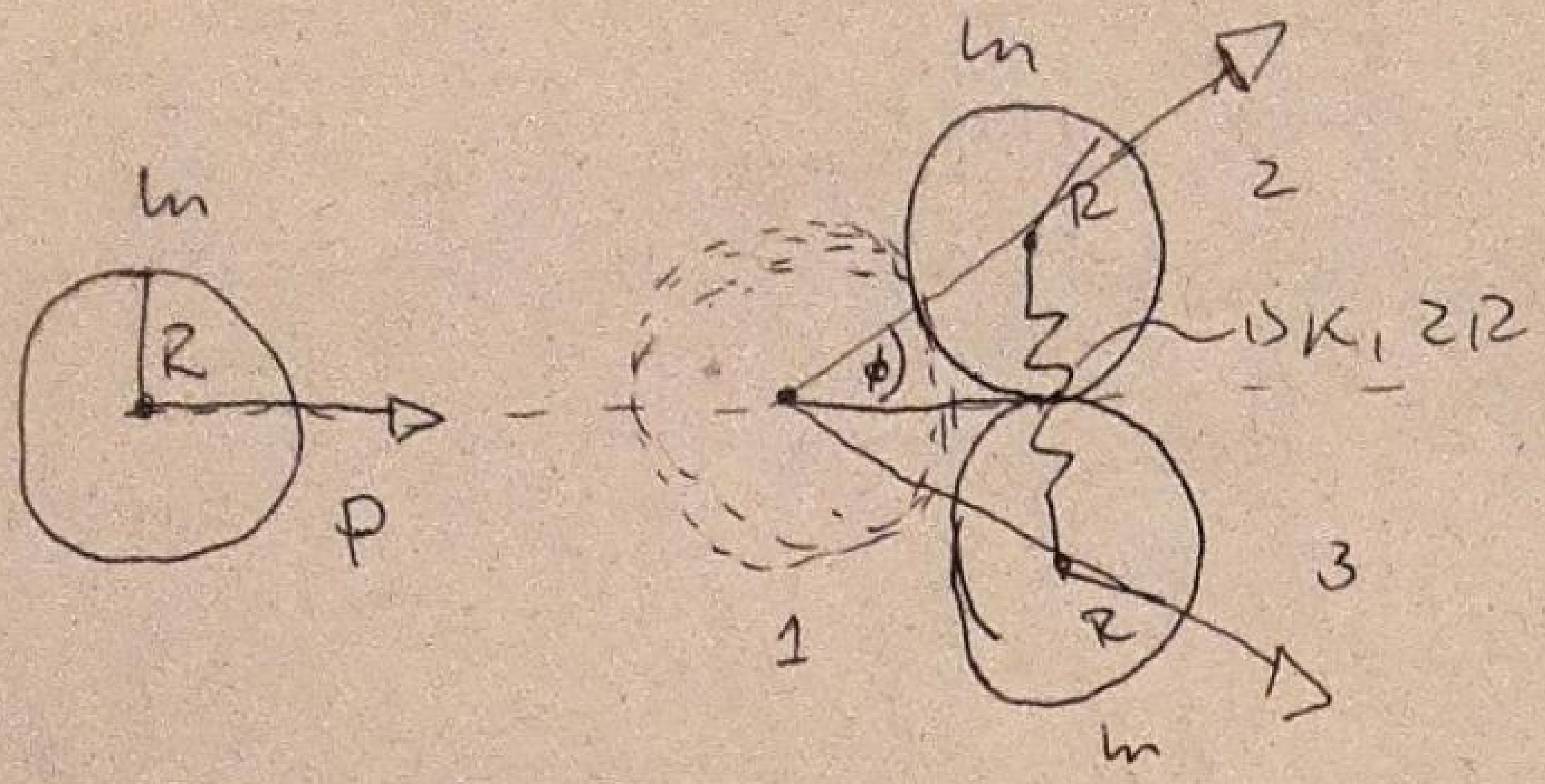
$\frac{1}{2} m v_E^2 = \frac{1}{2}K(l_f - l_0)^2$, l_0 = largo natural, l_f = largo final $= \delta + l_f$

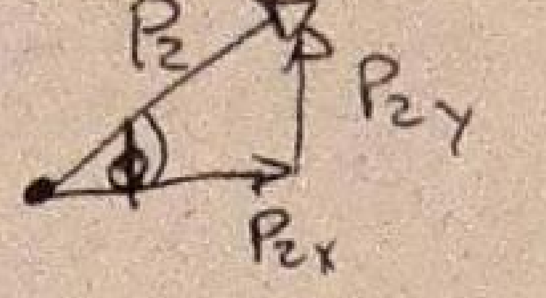
$m v_E^2 = K\delta^2$, se puede usar (4) ó (5) para despejar v_E^2, usando (5)

$\Rightarrow \frac{m \mu g L}{K} = \delta^2$, y $L = \frac{5}{3}\frac{R}{\mu}$, Por (6)

$\Rightarrow \delta^2 = \frac{5}{3}\frac{mgR}{K} \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{mgR}{K}}}$

P2





$$\sin\phi = \frac{P_{2y}}{P_2}$$

$$\cos\phi = \frac{P_{2x}}{P_2}$$

a) del dibujo: $\sin\phi = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

↳ Los discos golpeados se moverán siguiendo la recta que une sus centros con el centro del disco que los impacta

b) $\vec{P}$ es el momento del disco de la izquierda antes de la colisión. Como los otros discos están en reposo, su momento es cero.

Sea $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, y $\vec{P}_3$ los momento del disco que impacta, del superior, y del inferior, respectivamente.

Conservando el momentum:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

, Descomponiendo en sus componentes obtenemos 2 ecuaciones:

$$P\hat{x} = P_1\hat{x} + P_2\cos\phi\,\hat{x} + P_3\cos\phi\,\hat{x}$$

$$0 = 0 + P_2\sin\phi\,\hat{y} - P_3\sin\phi\,\hat{y}$$

↳ esta última ecuación implica $P_2 = P_3$ y $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, usando esto en la ecuación para el eje $\tilde{x}$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2\frac{\sqrt{3}}{2} + P_2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = P_1 + P_2\sqrt{3}$$

$$P_1 = P - P_2\sqrt{3} \quad (*)$$

- Cómo es una Colisión podemos conservar la energía Cinética, pero expresémosla de una forma distinta a lo usual.

$K = \frac{1}{2}mv^2$, sabemos que $p = mv$, entonces multiplicamos K por $1 = \frac{m}{m}$

$$K = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}}$$

Entonces conservando la energía antes y después del Choque:

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_3^2}{m}$$, Como $p_2 = p_3$

$$\Rightarrow p^2 = p_1^2 + 2p_2^2 \quad (**)$$

Elevamos (*) al cuadrado e igualamos con (**)

$$\Rightarrow p^2 = (p - p_2\sqrt{3})^2 + 2p_2^2$$

$$\cancel{p^2} = \cancel{p^2} - 2pp_2\sqrt{3} + 3p_2^2 + 2p_2^2$$

$$\Rightarrow 5p_2^2 = 2pp_2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}p = p_3}$$ ⇝ reemplazando en (*)

$$p_1 = p - \sqrt{3}p_2 = p - \sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{5}p = p - \frac{6}{5}p$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 = -\frac{1}{5}p}$$

Finalmente, el momento de cada disco después del choque es:

$$\boxed{\vec{p}_1 = -\frac{1}{5}p\hat{x}} \qquad \vec{p}_2 = \overbrace{p_2}^{\frac{2\sqrt{3}}{5}p}\overbrace{\cos(30^\circ)}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\hat{x} + p_2\overbrace{\sin(30^\circ)}^{1/2}\hat{y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p}_2 &= \frac{3}{5}p\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{5}p\hat{y} \\ \vec{p}_3 &= \frac{3}{5}p\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{5}p\hat{y} \end{aligned}}$$

c) El resorte se estira solo en el eje y, puesto que los discos tienen velocidad relativa cero entre ellos. Luego, conservamos la energía solo en este eje, en ausencia de fuerzas no conservativas:

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad , P_{2y} = -P_{3y} = \frac{\sqrt{3}}{5} P$$

$$\frac{1}{2}\frac{(P_{2y})^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{(P_{3y})^2}{m} + 0 = 0 + \frac{1}{2} K \delta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}P\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}P\right)^2 = \frac{1}{2} K \delta^2$$

$$\frac{2}{m}\cdot\frac{3}{25}P^2 = K\delta^2$$

$$\Rightarrow \delta^2 = \frac{2}{mK}\,\frac{3}{25}P^2 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\sqrt{3}}{5} P \sqrt{\frac{2}{mK}}}$$