Pauta Aux #6:

P1) Cohete y proyectil. Datos: $\{a_0$, velocidad inicial nula del cohete, $L, \theta\}$

Calcule la rapidez inicial que debe tener el proyectil para impactar al cohete.

1. Datos ✓
2. Sist. de ref + dibujo.
3. Planteamos las ecs. de cinemática para el proyectil y el cohete.

origen donde está el cañón.

Proyectil:

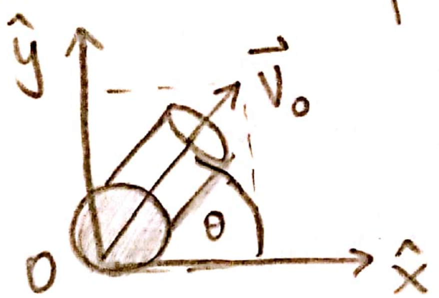
- $x_p(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + V_{0x} t + \cancel{\frac{1}{2} a_{0x} t^2}^{\,0} = V_{0x} \cdot t \quad \ldots \ldots (1)$
- $y_p(t) = \underbrace{\cancel{y_0}}_{0} + V_{0y} t + \frac{1}{2} \underbrace{a_{0y}}_{-g} t^2 = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots (2)$

Cohete:

- $x_c(t) = \cancel{x_0}^{\,L} + \cancel{V_{0x} t}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{2} a_{0x} t^2}^{\,0} = L \quad \ldots \ldots (3)$
- $y_c(t) = \underbrace{\cancel{y_0}}_{0} + \underbrace{\cancel{V_{0y}}}_{0} \cdot t + \frac{1}{2} \underbrace{a_{0y}}_{a_0} t^2 = \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad \ldots (4)$

Luego, nuestras incógnitas en las ecs. son: $\{V_{0x}, V_{0y}\}$ que son las componentes de la velocidad inicial del proyectil que queremos calcular! $\vec{V}_0 = V_{0x} \hat{x} + V_{0y} \hat{y} \ldots (5)$

Para incorporar el ángulo θ que es un dato del problema analicemos el proyectil:



Podemos descomponer la velocidad inicial $\vec{V}_0$ del proyectil como:

$$\vec{V}_0 = \underbrace{V_0 \cos\theta}_{V_{0x}} \hat{x} + \underbrace{V_0 \operatorname{sen}\theta}_{V_{0y}} \hat{y} \quad \ldots (6)$$

y entonces por (5) identificamos:

... donde V_0 es la rapidez inicial, que es nuestra incógnita

Escaneado con CamScanner

Reemplazando (6) en nuestras ecuaciones (1 − 4), tenemos:

Proyectil: $X_p(t) = V_0 \cos\theta \cdot t$ .... (1)

$y_p(t) = V_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ .... (2)

Cohete: $X_c(t) = L$ .... (3)

$y_c(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$ .... (4)

y ahora tenemos solo 1 incógnita que es V_0, la rapidez inicial del proyectil (lo que buscamos).

Ahora sí, notamos que para que el proyectil logre impactar al cohete en algún tiempo t^*, se debe cumplir:

I) $X_p(t^*) \stackrel{!}{=} X_c(t^*)$

II) $y_p(t^*) \stackrel{!}{=} y_c(t^*)$

Imponiendo eso:

I) $V_0 \cos\theta \, t^* \stackrel{!}{=} L$ .... (7)

II) $V_0 \operatorname{sen}\theta \, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} a_0 t^{*2}$ .... (8)

2 ecuaciones para 2 incógnitas: $\{t^*, V_0\}$

De (8), dividiendo por t^*:

$\Rightarrow V_0 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}(a_0 + g) t^* \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{2 V_0 \operatorname{sen}\theta}{(a_0 + g)}}$

Reemplazando t^* en (7) obtenemos:

$V_0 \cos\theta \cdot \left(\frac{2 V_0 \operatorname{sen}\theta}{a_0 + g} \right) = L \Rightarrow V_0^2 = \frac{L(a_0 + g)}{2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}$

$\Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{L(a_0 + g)}{2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}}}$ → rapidez inicial del proyectil para colisionar al cohete.

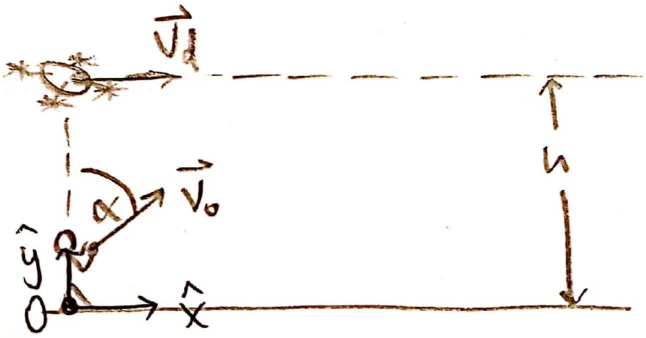
P2 | Niño y Drone.

a) ¿ángulo α con que se debe disparar la piedra para impactar al drone?

1. Datos. - Drone vuela horizontalmente con velocidad $\vec{V}_d$
- Altura h
- Niño dispara piedras con velocidad $\vec{V}_o$.
- Dispara justo cuando el drone lo sobrevuela.

2. Sist. de ref:

Colocamos el origen donde esté el niño cuando el drone lo sobrevuela. (en el suelo)



Estamos suponiendo que el niño lanza las piedras justo desde el suelo.

3. Ecuaciones de cinemática:

Piedra:
$$x_p(t) = \cancelto{0}{x_o} + V_{ox}\cdot t + \tfrac{1}{2}\cancelto{0}{a_{px}} t^2 = V_{ox}\cdot t \quad \dots (1)$$
$$y_p(t) = \cancelto{0}{y_o} + V_{oy} t + \tfrac{1}{2}\cancelto{-g}{a_{py}} t^2 = V_{oy}\cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \dots (2)$$

Drone:
$$x_d(t) = \cancelto{0}{x_o} + \cancelto{V_d}{V_{ox}} t + \tfrac{1}{2}\cancelto{0}{a_{x}} t^2 = V_d\cdot t \quad \dots (3)$$
$$y_d(t) = \cancelto{h}{y_o} + \cancelto{0}{V_{oy}} t + \tfrac{1}{2}\cancelto{0}{a_{y}} t^2 = h \quad \dots (4)$$

Luego, al igual que en la P1, relacionemos V_{ox} y V_{oy} (rapideces iniciales de las piedras en los ejes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ respectivamente) con el ángulo α y la rapidez de las piedras V_o, que es un dato. Del dibujo:

$$V_{ox} = V_o \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad V_{oy} = V_o \cos\alpha \quad \dots (5)$$

Reemplazando (5) en nuestras ecs. (1–4) tenemos:

(1) $x_p(t) = V_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t$

(2) $y_p(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

(3) $x_d(t) = V_d \cdot t$

(4) $y_d(t) = h$

Luego, para impactar al drone en un tiempo t^* se debe cumplir

I) $x_p(t^*) \overset{!}{=} x_d(t^*)$

II) $y_p(t^*) \overset{!}{=} y_d(t^*)$

Reemplazando.

I) $\Rightarrow V_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cancel{t^*} \overset{!}{=} V_d \cdot \cancel{t^*} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{V_d}{V_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arcsen}\left(V_d/V_0\right)}$$

ángulo respecto a la normal tq. el niño impacte al drone

b) ¿Qué dist. d alcanza a recorrer el drone antes de ser impactado?

Calculemos el tiempo t^* en que lo impacta. Por (II):

II) $\Rightarrow V_0 \cos\alpha\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \overset{!}{=} h \quad / \cdot \frac{2}{g}$

$$\Rightarrow \boxed{t^{*2} - \frac{2V_0}{g}\cos\alpha\, t^* + \frac{2h}{g} = 0} \rightarrow \text{cuadrática para } t^*$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{\left(\frac{2V_0}{g}\right)\cos\alpha \pm \sqrt{\frac{4V_0^2}{g^2}\cdot\cos^2\alpha - 4\cdot\frac{2h}{g}}}{2}$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{V_0}{g}\cos\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2\cos^2\alpha - \frac{2h}{g}}$$

elegimos el menor tiempo pues será cuando impacten primero!

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{V_0}{g}\cos\alpha - \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2\cos^2\alpha - \frac{2h}{g}}} \rightarrow \text{tiempo de la colisión}$$

Escaneado con CamScanner

continuación.

Ahora que tenemos t^*, reemplazamos en (3) tq. $x_d(t^*) = d$

$$\Rightarrow d = V_p \cdot t^* = V_p \cdot \left[\frac{V_0}{g}\cos\alpha - \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 \cos^2\alpha - \frac{2h}{g}} \right]$$

Reemplazando lo obtenido para α, tenemos:

$$\boxed{d = V_p \left[\frac{V_0}{g}\cos\left(\arcsin\left(\frac{V_d}{V_0}\right)\right) - \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\arcsin\left(\frac{V_d}{V_0}\right)\right) - \frac{2h}{g}} \right]}$$

↳ dist. recorrida por el drone hasta el impacto.

c) Velocidad mínima del proyectil para llegar al drone?

De lo obtenido para t^*, como el tiempo debe ser ≥ 0 y real para que colisionen, entonces imponiendo eso:

$$t^* = \frac{V_0}{g}\cos\alpha - \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 \cos^2\alpha - \frac{2h}{g}} \geq 0$$

siempre que $\sqrt{}$ sea ≥ 0, t^* será > 0 (piensen por qué).

Luego, se debe cumplir:

$$\sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 \cos^2\alpha - \frac{2h}{g}} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 \cos^2\alpha \geq \frac{2h}{g}$$

Reemplazando α:

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{g^{\cancel{2}}} \cos^2\left(\arcsin\left(\frac{V_d}{V_0}\right)\right) \geq \frac{2h}{\cancel{g}}$$

} Usamos la identidad: $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow V_0^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{V_d}{V_0}\right)^2\right) \geq 2gh \Rightarrow V_0^2 - V_d^2 \geq 2gh$$

$$\Rightarrow V_0^2 \geq 2gh + V_d^2 \Rightarrow \boxed{V_0^{mín} = \sqrt{2gh + V_d^2}}$$

→ rapidez mínima del proyectil

$V_0^{mín}$ es cuando se cumple la igualdad