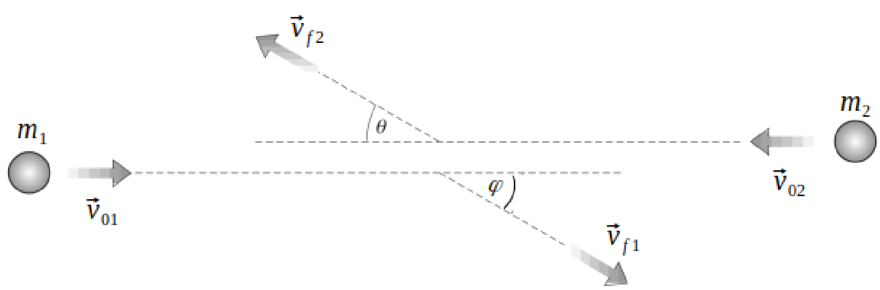
Pauta Control Recuperativo 2

FI1000 - Introducción a la Física Clásica
Semestre de Otoño 2022
8 de julio 2022
Duración: 3 horas

Control recuperativo 2

P1. Un asteroide de masa m_1 se dirige a la tierra con velocidad $\vec{v}_{01}$. Científicos de la NASA han decidido desviarlo de su trayectoria usando un proyectil de masa m_2, el cual viaja con velocidad $\vec{v}_{02}$. El proyectil choca con el asteroide fuera de su centro, de manera que ambos objetos rebotan como se muestra en la figura. Considere que antes del choque, ambos objetos viajan con velocidad horizontal. Después del choque, el asteroide rebota formando un ángulo φ con la horizontal. Desprecie cualquier efecto gravitatorio.



a) (4 pts.) ¿Cuál es la velocidad final del proyectil m_2 si el asteroide m_1 tiene una rapidez v_{f1} después del choque?

Usamos conservación de momentum lineal, tanto en la dirección horizontal como vertical. **+0,5 punto**

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos\varphi + m_2 v_{f2x}, \qquad (1)$$ **+1,0 punto**

$$0 = -m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\varphi + m_2 v_{f2y}, \qquad (2)$$ **+1,0 punto**

donde v_{2fx} y v_{2fy} son las componentes horizontal y vertical de la velocidad final del proyectil después de la colisión, $\vec{v}_{2f} = v_{2fx}\hat{x} + v_{2fy}\hat{y}$. **+0,5 punto**

De la ecuación (1), despejamos

$$\boxed{v_{f2x} = \frac{m_1}{m_2}\left(v_{01} - v_{1f}\cos\varphi\right) - v_{02}.} \qquad (3)$$ **+0,5 punto**

Y de la ecuación (2), despejamos

$$\boxed{v_{f2y} = \frac{m_1}{m_2} v_{f1} \operatorname{sen}\varphi.} \qquad (4)$$ **+0,5 punto**

Método 1

De manera alternativa, también podemos escribir la velocidad final del proyectil buscando su magnitud v_{2f} y dirección a partir del ángulo θ. En ese caso, en las ecuaciones de conservación de momentum, se tiene

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos\varphi - m_2 v_{f2} \cos\theta, \tag{5}$$ **+1,0 punto**

$$0 = -m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\varphi + m_2 v_{f2} \operatorname{sen}\theta, \tag{6}$$ **+1,0 punto**

De la ecuación (6), se tiene

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\varphi}{m_2 \operatorname{sen}\theta}, \tag{7}$$ **+0,5 punto**

y reemplazando en (5),

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos\varphi - \frac{m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\varphi}{\tan\theta} \tag{8}$$

de donde obtenemos

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi + \frac{m_2}{m_1}\frac{v_{02}}{v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}}.} \tag{9}$$ **+0,5 punto**

Este resultado es consistente con lo encontrado anteriormente, notando que $\tan\theta = |v_{f2y}/v_{f2x}|$

Usando este ángulo y la expresión (7) se tiene la magnitud de $\vec{v}_{2f}$. Para llegar a un resultado analítico, usamos que $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta/\sqrt{1+\tan^2\theta}$. Se obtiene

$$\boxed{v_{f2} = \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2} v_{f1}^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \left(\frac{m_1}{m_2} v_{f1}\cos\varphi + v_{02} - \frac{m_1}{m_2} v_{01}\right)^2}.} \tag{10}$$ **+0,5 punto**

Método 2 Este resultado también es consistente con lo anterior, $v_{2f} = \sqrt{v_{f2x}^2 + v_{f2y}^2}$. **+0,5 punto**

b) (2 pts.) Usando el resultado anterior, discuta los límites en que (i) el proyectil es mucho más masivo que el asteroide, $m_2 \gg m_1$ y en que (ii) el proyectil tiene la misma masa y rapidez inicial que el asteroide, $m_2 = m_1$ y $v_{01} = v_{02}$.

(I) Cuando el proyectil es mucho más masivo que el asteroide, se tiene $m_1/m_2 \approx 0$. En ese caso, **+0,5 punto**

$$\vec{v}_{f2} \approx -v_{02}\hat{x}, \tag{11}$$ **+0,5 punto**

es decir, el proyectil casi no se ve desviado de su trayectoria original.

De manera alternativa, también se puede observar de las ecuaciones (9) y (10) que en ese límite, $\tan\theta \approx 0$ y $v_{f2} \approx v_{02}$, llegandose a la misma conclusión.

(II) Si el proyectil tiene igual masa y rapidez inicial que el asteroide, entonces

$$\vec{v}_{f2} = -v_{f1}\cos\varphi\hat{x} + v_{f1}\operatorname{sen}\varphi = -\vec{v}_{f1}. \tag{12}$$ **+0,5 punto**

Es decir, el choque pasa a ser completamente simétrico, con $\vec{v}_{02} = -\vec{v}_{01}$ y $\vec{v}_{f2} = -\vec{v}_{f1}$. **+0,5 punto**

También se puede notar de las ecuaciones (9) y (10) que en ese caso $\tan\theta = \tan\varphi$ y $v_{f2} = v_{f1}$, es decir un choque completamente simétrico.

P2. Dos esferas pequeñas, de masas M_1 y $M_2 = 2M_1$, pueden deslizar por alambres rígidos, paralelos y lisos. Los alambres están separados una distancia d y están dispuestos en un plano horizontal. Las esferitas están unidas mediante un resorte ideal de constante de fuerza k y de longitud natural despreciable. Las esferitas se sueltan del reposo en la posición mostrada en la Fig. 1. Determine las rapideces de las partículas cuando las esferitas se encuentran en el estado que muestra la Fig. 2.

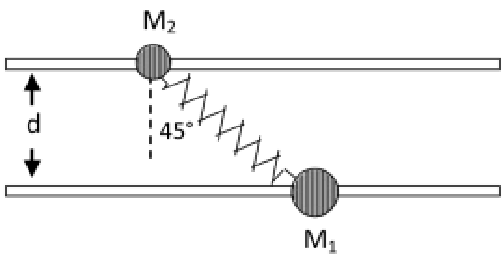


Figura 1

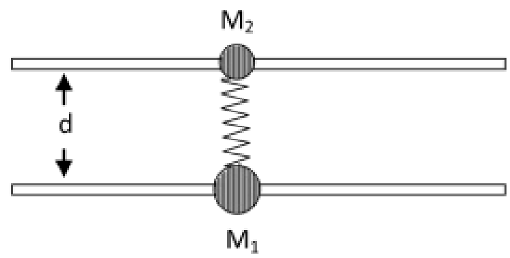


Figura 2

Se tiene conservación de energía mecánica pues no hay fuerzas disipativas que realicen trabajo. También se conserva el momentum en la dirección paralela a los alambres (que llamaremos eje x) pues no hay fuerzas externas en esa dirección. **+0,5 punto** **+0,5 punto**

Las energías mecánicas inicial y final son

$$E_i = \frac{1}{2}kx^2, \quad E_f = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 + \frac{1}{2}kd^2, \tag{13}$$ **+1,0 punto**

donde

$$\cos 45^\circ = \frac{d}{x} \Rightarrow x = \frac{d}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}d. \tag{14}$$ **+0,5 punto**

Entonces, por conservación de energía mecánica y reemplazando $M_2 = 2M_1$, se tiene

$$kd^2 = M_1(v_1^2 + 2v_2^2). \tag{15}$$ **+0,5 punto**

Con respecto al momentum en la dirección x, se tiene

$$p_i = 0, \quad p_f = M_1 v_1 + M_2 v_2, \Rightarrow v_1 = -\frac{M_2}{M_1}v_2 = -2v_2. \tag{16}$$ **+1,0 punto**

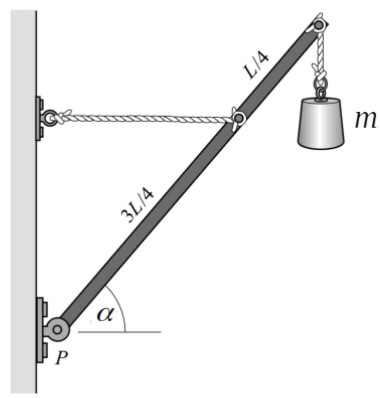
Reemplazando este resultado en la ecuación (15), se tiene

$$kd^2 = M_1(4v_2^2 + 2v_2^2) = 6M_1 v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{kd^2}{6M_1}}.} \tag{17}$$ **+1,0 punto**

Usando este resultado en la ecuación (16), se obtiene

$$\boxed{v_1 = -2\sqrt{\frac{kd^2}{6M_1}}.} \tag{18}$$ **+1,0 punto**

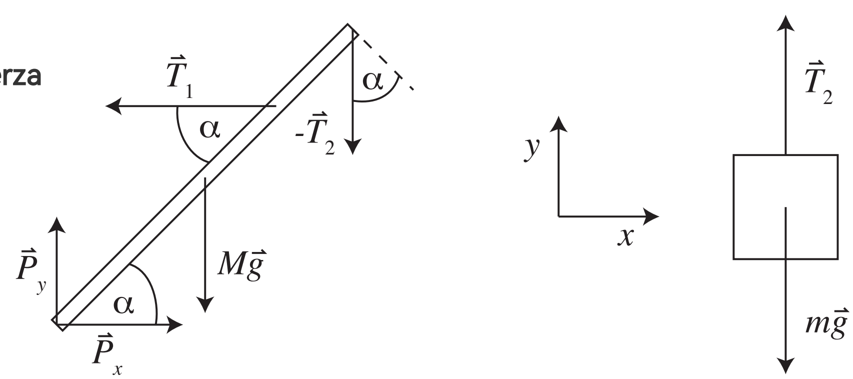
P3. Un asta de densidad uniforme y masa M está suspendida como se muestra en figura. En su extremo superior cuelga una masa m.



a) (3 pts.) Determine la magnitud de la tensión en la cuerda horizontal que sujeta al asta a la pared.

Primero hacemos los diagramas de cuerpo libre para el asta y la masa m.

+0,5 punto: 0,1 cada fuerza



+0,5 punto: 0,1 cada fuerza y 0,3 sistema de referencia bien definido para torque

Considerando que el sistema está en equilibrio, se tiene para el asta

Puntaje asignado en b)

$$\sum F_x = P_x - T_1 = 0, \tag{19}$$
+0,5 punto

$$\sum F_y = P_y - Mg - T_2 = 0, \tag{20}$$
+0,5 punto

$$\sum \tau_P = -\frac{L}{2} Mg\cos\alpha - LT_2\cos\alpha + \frac{3L}{4} T_1 \operatorname{sen}\alpha = 0, \tag{21}$$
+1,0 punto

mientras que para m se tiene

$$\sum F_y = T_2 - mg = 0. \tag{22}$$
+0,5 punto

Usando (22) se tiene $T_2 = mg$, y reemplazando en (21), podemos despejar T_1,

$$\boxed{T_1 = \frac{2g(M+2m)}{3\tan\alpha}.} \tag{23}$$
+0,5 punto

b) (3 pts.) Determine la fuerza que ejerce el pivote P sobre el asta.

A partir de (20) podemos encontrar la componente horizontal de la reacción en el pivote,

$$\boxed{P_x = (M+m)g.} \tag{24}$$ **+0,5 punto**

A partir de la ecuación (19) despejamos la componente vertical,

$$\boxed{P_x = \frac{2g(M+2m)}{3\tan\alpha}.} \tag{25}$$ **+0,5 punto**

La fuerza total que ejerce el pivote sobre el asta es $\vec{P} = P_x\hat{x} + P_y\hat{y}$. **+0,5 punto**

+0,5 puntos; si tiene bien segunda ley de newton, tiene correcto Px y Py de (19) y (20) pero no reemplaza los valores de T1 y T2 aún .