- ACELERACIÓN $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Ej $\vec{r} = 3t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j}$

$$\vec{v} = 3\,\hat{i} + 2t\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = 2\,\hat{j}$$

ES UN MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE EN LA DIRECCIÓN $\hat{j}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{t})$$

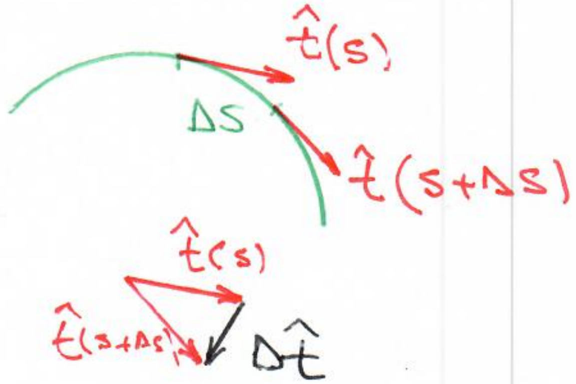
$$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{t} + v\,\frac{d\hat{t}}{dt}$$

LA COMPONENTE EN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO ES $\dot{v}$

EXAMINAMOS AHORA $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$

EL VECTOR $\hat{t}$ CAMBIA CON LA DISTANCIA RECORRIDA "s" Y ÉSTA CON EL TIEMPO "t"

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\hat{t}}{ds}$$



$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat{t}(s+\Delta s)-\hat{t}(s)}{\Delta s}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}$$

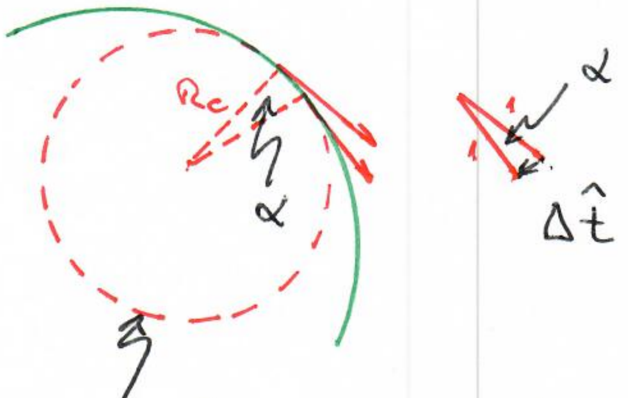
$\dfrac{d\hat{t}}{ds}$ es PERPENDICULAR A $\hat{t}$

DEMOSTRACIÓN

$$\hat{t}\cdot\hat{t} \equiv 1 \rightarrow \frac{d}{ds}(\hat{t}\cdot\hat{t}) = 0$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t} + \hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 2\,\hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 0$$

$\frac{d\hat{t}}{ds}$ es $\perp$ a $\hat{t}$ EN LA DIRECCIÓN DE LA CURVATURA (VER. FIG.)



MAGNITUD DE $\frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}$

CÍRCULO OSCULADOR DE RADIO R_c

EN EL LÍMITE, CUANDO $\Delta s \to 0$

$$\frac{|\Delta\hat{t}|}{1} = \frac{\Delta s}{R_c} \longrightarrow \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\hat{t}|}{\Delta s} = \frac{1}{R_c}$$

$$\therefore \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = v\,\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{v}{R_c}\,\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\hat{t} + \frac{v^2}{R_c}\,\hat{n}}$$

LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA AUMENTA A MEDIDA QUE R_c DISMINUYE !!

CÁLCULO DE R_c EN FUNCIÓN DE $\vec{v}$ y $\vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{v} = \left(\dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}\right) \times v\hat{t}$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = \frac{v^3}{R_c}(\hat{n} \times \hat{t})$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \frac{v^3}{R_c} \longrightarrow \boxed{R_c = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}}$$

EJ. $\vec{r} = 3t\hat{i} + t^2\hat{j}$

RADIO DE CURVATURA EN $t = 1$

$\vec{v} = 3\hat{i} + 2t\hat{j}$ EN $t=1$ $v = \sqrt{13}$ (m/s)

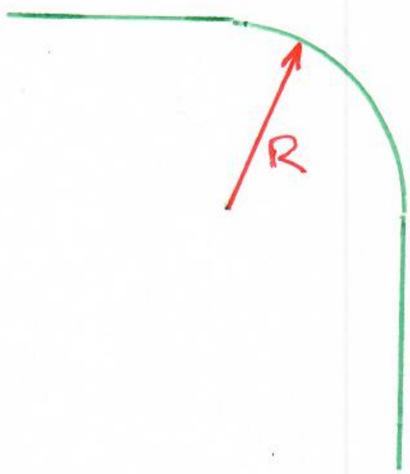
$\vec{a} = 2\hat{j}$

$\vec{a} \times \vec{v} = 2\hat{j} \times (3\hat{i} + 2t\hat{j}) = 6\hat{j} \times \hat{i}$

$|\vec{a} \times \vec{v}| = 6$

$$R_c = \frac{13^{3/2}}{6} = 7.8 \text{ m}$$

RESULTA EVIDENTE QUE CAMBIO BRUSCO EN EL RADIO DE CURVATURA PROVOCAN CAMBIO ABRUPTO EN LA ACELERACION PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA.



EJ. VIA FÉRREA

CAMBIO PERPENDICULAR DE DIRECCION MEDIANTE UN CUARTO DE CÍRCULO DE RADIO $R = 200$ m

TREN VIAJA A $V_0 = 100\ km/h = 27.8\ \frac{m}{s}$

ACELERACION ~~NOR~~ EN LA CURVA

$$a_n = \frac{v^2}{R_c} = \frac{27.8^2}{200} = \underline{3.9}\ m/s^2$$

AL ENTRAR EN LA CURVA LA ACELERACIÓN NORMAL A LA TRAYECTORIA PASA BRUSCAMENTE DE 0 A $3.9\ m/s^2$

SI EL TREN SE MUEVE A 300 km/h LA ACELERACION SUBE A $\underline{\underline{34.7}}\ m/s^2$

DOS TIPOS DE SITUACIONES

$$\vec{r}(t) \longrightarrow \vec{v}(t) \longrightarrow \vec{a}(t)$$

$$\vec{a}(t) \longrightarrow \vec{v}(t) \longrightarrow \vec{r}(t)$$ PROBLEMA INVERSO

$+$

COND. INICIAL

SUPONGAMOS UNA PARTÍCULA SE MUEVE CON ACELERACIÓN $\vec{a}(t)$ CONOCIDAD A PARTIR DE UNA CONDICIÓN INICIAL $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ EN $t=0$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) \rightarrow d\vec{v} = \vec{a}(t)\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$d\vec{r} = \vec{v}_0\,dt + \left[\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right]dt$$

INTEGRANDO...

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \int_0^t \left[\int_0^t a(\tau)\, d\tau \right] dt$$

DE AQUÍ SE PUEDE CALCULAR LA TRAYECTORIA

EJ $\quad \vec{a} = \vec{a}_0 \quad$ (CONSTANTE)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}_0\, dt = \vec{v}_0 + t\,\vec{a}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \int_0^t [t\,\vec{a}_0]\, dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{a}_0$$

$(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES $\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$

$(\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \perp (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad$ MOV. PLANO

$= 0$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) = \left(t\,\vec{v}_0 + \frac{t^2}{2} \vec{a}_0 \right) \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0)$$

$= 0$

EJEMPLO

$$\vec{a} = 0$$

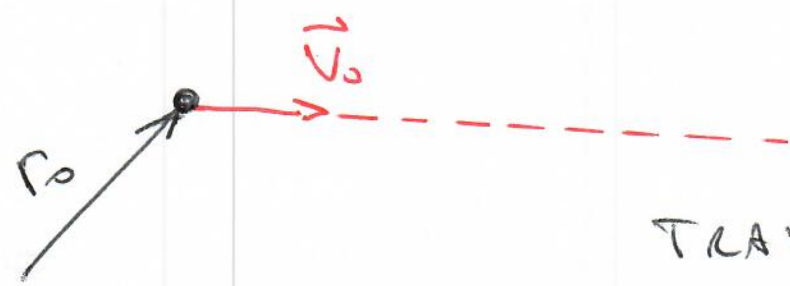
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_0\, dt$$

Integrando...

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$



TRAYECTORIA RECTILÍNEA !!