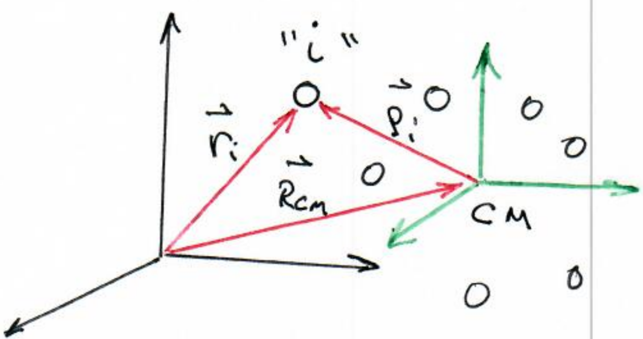
Fi 2001 MECANICA SESIÓN Nº 21 P. ACEITUNO 10/06/21

★ MOVIMIENTO DE UN S.P. ALREDEDOR DEL C.M.



YA VIMOS QUE SE CUMPLE QUE

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o}$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{\rho}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_{cm} + \vec{\rho}_i) \times m_i (\vec{v}_{cm} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{cm} \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}_o = M_T \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{*} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i\right)}_{**} \times \vec{v}_{cm}$$

ANALIZAMOS PRIMERO EL TÉRMINO (**)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i)$$

$$\cancel{\vec{R}_{CM}} = \frac{\cancel{M_T}}{\cancel{M_T}}\cancel{\vec{R}_{CM}} + \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i$$

∴ CONCLUSIÓN $\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i \equiv 0}$

ANALIZAMOS AHORA EL TÉRMINO (*)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{V}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$\cancel{\vec{V}_{CM}} = \frac{\cancel{M_T}}{\cancel{M_T}}\cancel{\vec{V}_{CM}} + \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

CONCLUSIÓN : $\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i \equiv 0}$

$$\therefore \vec{L}_0 = \vec{R}_{CM} \times M_T \vec{v}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{\vec{L}_{CM}}$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{R}_{CM} \times M_T \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}}$$

MOMENTUM ANGULAR DEL S.P. ALREDEDOR DEL C.M.

DERIVANDO LA EXPRESIÓN ANTERIOR . . . .

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{R}_{cm}}{dt}}_{\vec{V}_{cm}} \times M_T\vec{V}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \underbrace{M_T\frac{d\vec{V}_{cm}}{dt}}_{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext}} + \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{V}_{cm} \times M_T\vec{V}_{cm}}_{=0}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{R}_{cm} \times \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} + \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$$

$$= \vec{\tau}_o = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} - \sum_{i=1}^{N}\vec{R}_{cm} \times \vec{F}_i^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}(\underbrace{\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}}_{\vec{\rho}_i}) \times \vec{F}_i^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

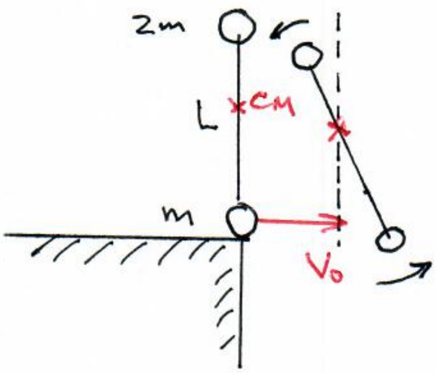
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}^{ext}}$$

TORQUE DE LAS FUERZAS EXTERNAS C/R AL C.M.

TORQUE DE LAS FUERZAS GRAVITACIONALES ALREDEDOR DEL C.M

$$\vec{\tau}_{cm}^{(g)} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \times m_i \vec{g} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i \right)}_{\equiv 0} \times \vec{g}$$

¡ LA GRAVEDAD NO EJERCE TORQUE ALREDEDOR DEL C.M. !



EJEMPLO *

UNA VEZ QUE LA PARTICULA "m" PIERDE CONTACTO CON LA SUPERFICIE HORIZONTAL LA ÚNICA FUERZA EXTERNA ES LA GRAVEDAD

$$\therefore \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{L}_{cm} \equiv \text{CONST}}$$

EN $t \equiv 0$

$$Y_{cm} = \frac{2mL\hat{j}}{3m} = \frac{2}{3} L \hat{j}$$

$$\vec{L}_{cm} = \sum_{i=1}^{2} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{\rho}_i \qquad \vec{v}_i = \vec{V}_{cm} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

$m_1 = m$

$m_2 = 2m$

EN $t = 0$

$$\vec{r}_1 = 0 \qquad \vec{r}_2 = L\hat{j}$$

$$\vec{v}_1 = v_0\,\hat{i} \qquad \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{2}{3}L\,\hat{j}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m v_0\,\hat{i}}{3m} = \frac{v_0}{3}\,\hat{i}$$

$t = 0$

$$\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{cm} = -\frac{2}{3}L\,\hat{j}$$

$$\vec{\rho}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{cm} = L\hat{j} - \frac{2}{3}L\hat{j} = \frac{1}{3}\,\hat{j}$$

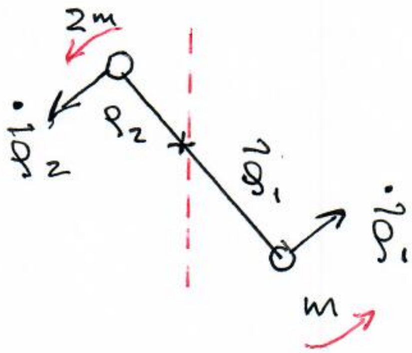
$$\dot{\vec{\rho}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = V_0\hat{i} - \frac{V_0}{3}\hat{i} = \frac{2}{3}V_0\,\hat{i}$$

$$\dot{\vec{\rho}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = \vec{0} - \frac{V_0}{3}\hat{i} = -\frac{V_0}{3}\,\hat{i}$$

$$\vec{L}_{cm} = \left(-\frac{2}{3}L\hat{j}\right) \times m\left(\frac{2}{3}V_0\,\hat{i}\right) + \frac{L}{3}\,\hat{j} \times 2m\left(-\frac{V_0}{3}\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{L}_{cm} = \frac{4}{9} m L v_0\,\hat{k} + \frac{2}{9} m L v_0\,\hat{k}$$

(*) $$\vec{L}_{CM} = \frac{6}{9} m L v_0 \hat{k} \quad \text{(CONSTANTE)}$$



CADA PARTÍCULA DESCRIBE UN CIRCULO ALREDEDOR DEL C.M.

$$\vec{L}_{CM} = \rho_1 \hat{\rho}_1 \times m_1 (\rho_1 \dot{\theta}) \hat{\theta}_1 +$$

$$+ \rho_2 \hat{\rho}_2 \times m_2 (\rho_2 \dot{\theta}) \hat{\theta}_2$$

$$\hat{\rho}_1 \times \hat{\theta}_1 = \hat{\rho}_2 \times \hat{\theta}_2 = \hat{k}$$

$$\vec{L}_{CM} = (m_1 \rho_1^2 \dot{\theta} + m_2 \rho_2^2 \dot{\theta}) \hat{k}$$

(*) $$\vec{L}_{CM} = \left[m \left(\frac{2}{3} L\right)^2 + 2m \left(\frac{L}{3}\right)^2 \right] \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\frac{6}{9} m L v_0 = \frac{6}{9} m L^2 \dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{L}} \quad \text{(CONSTANTE)}$$

CONSIDERACIONES DE ENERGÍA EN UN S.P.

★ ENERGÍA CINÉTICA

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_{CM}^2 + 2\, \vec{v}_{CM} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$K = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i v_{CM}^2 + 2\, \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{=0} + \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \right]$$

$$K = \frac{1}{2} M_T V_{CM}^2 + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i}_{K_{CM}}$$

ENERGÍA CINÉTICA ASOCIADA AL MOVIMIENTO DEL C. M.

ENERGÍA CINÉTICA DEL MOV. ALREDEDOR DEL C. M

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M_T V_{CM}^2 + K_{CM}}$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA CERCA DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

$$V_G = \sum_{i=1}^{N} m_i g z_i = M_T g \underbrace{\frac{\sum m_i z_i}{M_T}}_{z_{CM}}$$

$$\boxed{V_G = M_T g z_{CM}}$$

EQUIVALE A LA ENERGÍA POTENCIAL DE UNA PARTÍCULA DE MASA M_T A UNA ALTURA z_{CM}

ECUACIÓN DE ENERGÍA PARA PARTÍCULA "i" DE UN. S.P.

ENERGÍA MECÁNICA TOTAL PART. "i"

$E_i = K_i + V_i$ (EN. CINÉTICA + EN. POTENCIAL)

V_i ES EL POTENCIAL ASOCIADO A UNA FUERZA CONSERVATIVA QUE ACTÚA SOBRE PARTÍCULA "i"

ΔE_i = TRABAJO DE F. NO CONSERVATIVAS QUE ACTÚAN SOBRE "i" + TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS INTERNAS DE INTERACCIÓN CON OTRAS PARTÍCULAS

ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DEL SISTEMA

$$E_T = \sum_{i=1}^{N} (k_i + V_i)$$

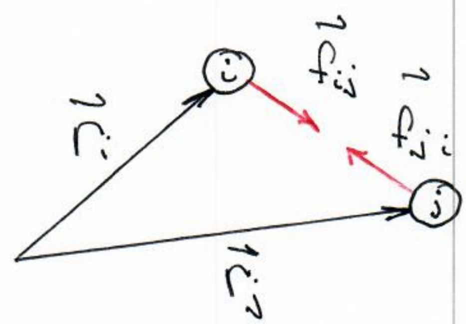
$$\Delta E_T = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} W_{i\,NC}^{ext}}_{\text{TRABAJO F. NO CONSERVATIVAS EXTERNAS}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} W_i^{INT}}_{\text{TRABAJO F. INTERNAS DEL S.P.}}$$

CASO ESPECIAL

SISTEMA DE PARTÍCULAS RÍGIDO

ES EL CASO CUANDO LAS POSICIONES RELATIVAS QUE OCUPAN LAS PARTÍCULAS DENTRO DEL SISTEMA NO CAMBIAN !!

ANALIZAMOS EL TRABAJO QUE REALIZAN LAS FUERZAS DE INTERACCIÓN ENTRE DOS PARTÍCULAS GENÉRICAS "i" Y "j" DEL S.P.



CUANDO LAS PARTÍCULAS "i" Y "j" SE DESPLAZAN EN $d\vec{r}_i$ Y $d\vec{r}_j$ RESPECTIVAMENTE

EL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR LAS FUERZAS $\vec{f}_{ij}$ Y $\vec{f}_{ji}$ ES

$$dW = \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \underbrace{\vec{f}_{ji}}_{-\vec{f}_{ij}}\cdot d\vec{r}_j$$

$$dW = \vec{f}_{ij}\cdot(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$$

$$= \vec{f}_{ij}\cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

COMO EL S.P. ES RÍGIDO

$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ES UN VECTOR DE MAGNITUD CONSTANTE

Si $\vec{b} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \rightarrow \vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$

CONSTANTE

$\therefore d(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 0$

$d\vec{b} \cdot \vec{b} + b \cdot d\vec{b} = 2\, d\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

$\therefore d\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow d\vec{b} \perp \vec{b}$

$\therefore d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \perp (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

COMO $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ESTA ALINEADO CON $\vec{f}_{ij}$

$\therefore dW = \vec{f}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$

¡ EN ESTE CASO LAS FUERZAS INTERNAS DE INTERACCIÓN ENTRE LAS PARTÍCULAS NO REALIZAN UN TRABAJO NETO !

$\therefore$ SI NO HAY FUERZAS EXTERNAS NO CONSERVATIVAS O SI LAS FUERZAS EXTERNAS NO REALIZAN TRABAJO SE TIENE QUE

$$\frac{1}{2} M_T V_{CM}^2 + \underbrace{K_{CM}}_{\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2} + \underbrace{V}_{\text{POTENCIAL TOTAL}} = E_0 \quad (\text{CONSTANTE})$$