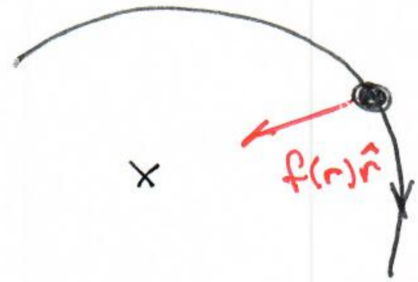
FUERZAS CENTRALES

$\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$



YA VIMOS QUE LAS FUERZAS CENTRALES SON CONSERVATIVAS

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV \longrightarrow dV = -f(r)\,dr$$

$$V(r) = -\int f(r)\,dr + \underbrace{C}_{\text{CONSTANTE ARBITRARIA}}$$

DEFINICIÓN

★ MOMENTUM ANGULAR C/R AL ORIGEN

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\vec{l} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

★ TORQUE DE UNA FUERZA $\vec{F}$ C/R AL ORIGEN

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}\times\vec{F}$$

★ RELACIÓN ENTRE $\vec{l}$ Y $\vec{\tau}_0$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r}\times \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}_{NETA}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_0}$$

CASO PARTICULAR FUERZA CENTRAL

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times f(r)\,\hat{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{l} = \vec{l}_0}$$

CONSTANTE

$$\vec{l}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$$

$\vec{r}_0$: POSICIÓN INICIAL

$\vec{v}_0$: VELOCIDAD INICIAL

★ EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL ES PLANO

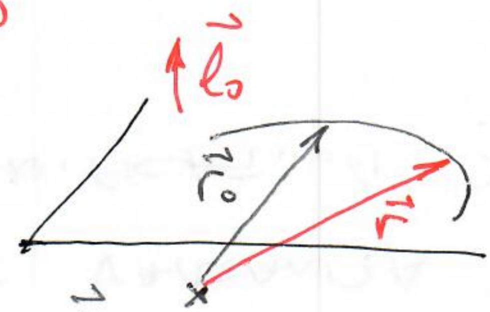
$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{l}_0$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot(\vec{r} \times m\vec{v}) = (\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot \vec{l}_0$$

$$\underbrace{\vec{r}\cdot(\vec{r} \times m\vec{v})}_{=0} - \vec{r}_0 \cdot \underbrace{(\vec{r} \times m\vec{v})}_{= \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot \vec{l}_0$$

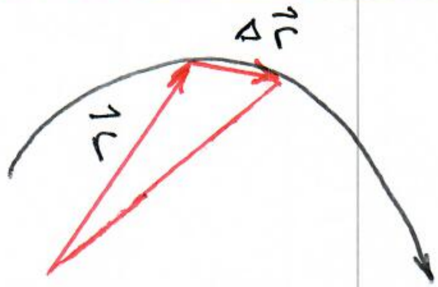
$= 0$

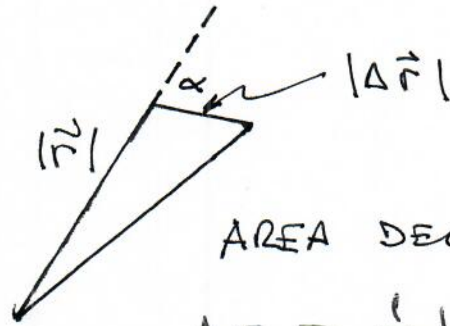
$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot \vec{l}_0 \equiv 0}$$



MOVIMIENTO OCURRE EN UN PLANO PERPENDICULAR A $\vec{l}_0$ QUE PASA POR $\vec{r}_0$

SEGUNDA LEY DE KEPLER





AREA DEL TRIÁNGULO

$$\Delta S = \frac{1}{2}|\vec{r}||\Delta\vec{r}|\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$

Si $\Delta t \to 0$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}|\underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}}_{\text{MOMENTUM ANGULAR}}| = \frac{1}{2m}|\vec{l}_0|$$

EN EL CASO DE UNA FUERZA CENTRAL LA RAPIDEZ DE BARRIDO ES CONSTANTE

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{l}_0|}$$

EN PARTICULAR ESTA PROPIEDAD SE APLICA A LOS MOVIMIENTOS PLANETARIOS

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

MOVIMIENTO ES PLANO $\longrightarrow$ COORD. POLARES

$$\hat{\rho}) \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho)$$

$$\hat{\theta}) \quad m\underbrace{(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})}_{= \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})} = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho^2\dot{\theta} = \text{CONSTANTE}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = \rho\hat{\rho} \times m(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}) = \vec{l_0}$$

$$= m\rho^2\dot{\theta}\;\hat{\rho}\times\hat{\theta}$$

$$\boxed{|\rho^2\dot{\theta}| = \frac{|\vec{l_0}|}{m}} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{l_0^2}{m^2\rho^4}$$

$$\hat{\rho}) \quad m\ddot{\rho} = f(\rho) + m\rho\dot{\theta}^2$$

$$m\ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{l_0^2}{m\rho^3} = f^*(\rho)$$

FUERZA EFECTIVA

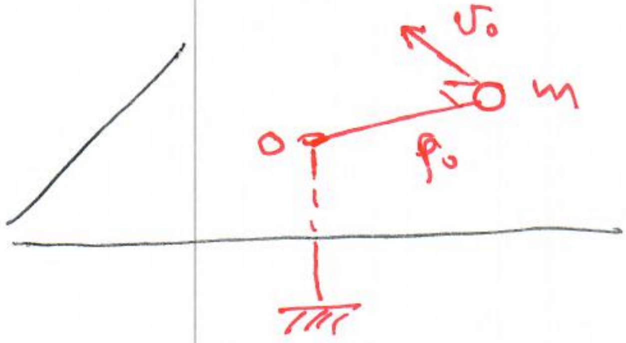
RESUELTA LA EC. PARA $\rho(t)$

ES POSIBLE ENCONTRAR COMO CAMBIA θ CON t

$$\rho^2\dot{\theta} = \rho_0^2\dot{\theta}\big|_{t=0} = C$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \longrightarrow \boxed{\theta(t) = \int^t \frac{C\,dt}{\rho^2(t)}}$$

EJEMPLO



ELÁSTICO EN SU LARGO NATURAL SU EXTREMO ESTA EN "O"

C.I. EL ELÁSTICO ATADO A PARTÍCULA DE MASA m SE ESTIRA ρ_0 Y SE IMPULSA LA PARTÍCULA CON VELOCIDAD $\vec{v}_0 \perp$ A $\rho_0 \hat{\rho}$

EC. MOV. PARA ρ

$$\hat{\rho}) \quad m\ddot{\rho} = -k\rho + \frac{l_0^2}{m\rho^3}$$

$$\text{C.I.} \quad \vec{r}_0 = \rho_0 \hat{\rho} \qquad |\vec{l}_0| = m \rho_0 v_0$$
$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{\theta}$$

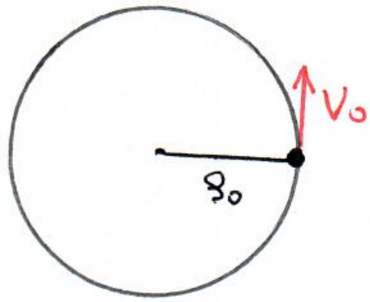
$$m\ddot{\rho} = -k\rho + \frac{m\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3}$$

a) CONDICIÓN PARA V_0 DE MODO QUE EL MOVIMIENTO SEA CIRCULAR

$$\rho = \rho_0 \quad \ddot{\rho} = 0$$

$$k\rho_0^4 = m\rho_0^2 v_0^2 \longrightarrow \boxed{v_0 = \rho_0 \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

SOLUCIÓN FÁCIL



COORD. NATURALES

$$m\frac{v_0^2}{R_c} = \frac{m v_0^2}{\rho_0} = k\rho_0$$

$$\boxed{v_0 = \rho_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

PREGUNTA

si $v_0 = 2\rho_0\sqrt{\frac{k}{m}}$

¿CUÁL ES EL MÁXIMO ALEJAMIENTO DE LA PARTÍCULA AL PUNTO DE ATRACCIÓN

$$m\ddot{\rho} = -k\rho + \frac{l_0^2}{m\rho^3}$$

$$\frac{l_0^2}{m} = \frac{(m\rho_0 v_0)^2}{m}$$

$$\int_0^0 m\dot{\rho}\,d\dot{\rho} = -k\rho\,d\rho + k\rho_0^4\frac{1}{\rho^3}\,d\rho$$

$$\frac{l_0^2}{m} = 4m\rho_0^2\rho_0^2\frac{k}{m}$$

$$\frac{l_0^2}{m} = 4k\rho_0^4$$

$\dot{\rho}\big|_{t=0} = \dot{\rho}\big|_{t^*} = 0$

t^* tiempo en el máximo alejamiento

$$0 = \frac{1}{2}k\rho^2\Big|_{\rho^*}^{\rho_0} + 4k\rho_0^4\left(\frac{1}{2}\rho^{-2}\right)\Big|_{\rho^*}^{\rho_0}$$

$$k\left(\rho_0^2-\rho^{*2}\right)+4k\rho_0^4\left(\frac{1}{\rho_0^2}-\frac{1}{\rho^{*2}}\right)=0$$

$$\cancel{k}\left(\rho_0^2-\rho^{*2}\right)=4\cancel{k}\rho_0^4\,\frac{\left(\rho_0^2-\rho^{*2}\right)}{\rho_0^2\,\rho^{*2}}$$

$\rho^*=\rho_0$ ES UNA SOLUCIÓN

$$1=\frac{4\rho_0^2}{\rho^{*2}}\longrightarrow\boxed{\rho^*=2\rho_0}$$

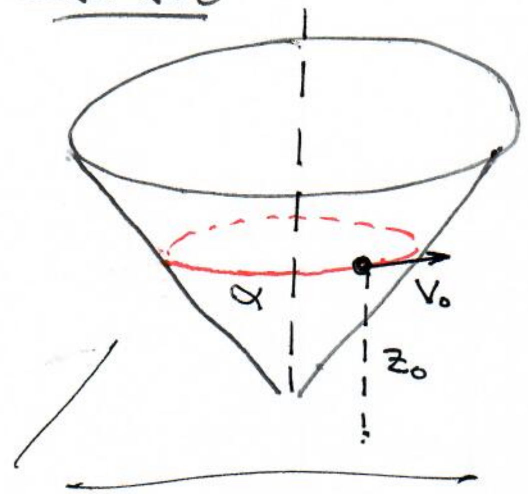
COMO SE CONSERVA
EL MOMENTUM ANGULAR

$$\rho^* v^* = \rho_0 v_0$$

$$2\rho_0 v^* = \rho_0\cdot 2\rho_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{v^*=\rho_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

EJEMPLO



SUPERFICIE CÓNICA (α)

PARTÍCULA SE LANZA CON VELOCIDAD $\vec{V}_0$ HORIZONTAL POR EL INTERIOR DE LA SUPERFICIE, A UNA ALTURA z_0

SE OBSERVA QUE EN EL MOVIMIENTO RESULTANTE LA MÁXIMA ALTURA QUE ALCANZA LA PARTÍCULA ES $1.5 \cdot z_0$

¿ V_0 ?

NO HAY ROCE !!

EC. DE MOVIMIENTO $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

★ $\vec{N}$ NO REALIZA TRABAJO

$m\vec{g}$ ES CONSERVATIVA. POTENCIAL ASOCIADO ES IGUAL A $V(z) = mgz$

★ SE CONSERVA LA ENERGIA

$$E_0 = \frac{1}{2}m v^2 + mgz = \frac{1}{2}m V_0^2 + mgz_0$$

COORD. CILÍNDRICAS

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

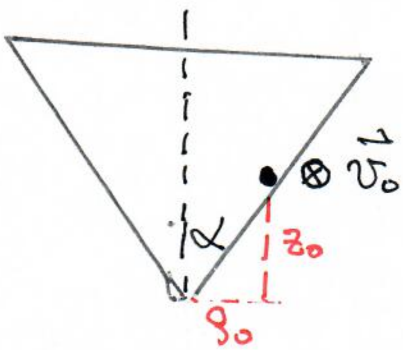
EN EL PUNTO MAS ALTO QUE ALCANZA LA PARTÍCULA ($z^* = 1.5\, z_0$)

$$\dot{\rho} = \dot{z} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{v}^* = \rho \dot{\theta} \hat{\theta}}$$

EC. MOV. SEGÚN $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta}) \quad m(\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{m}{2\rho} \cdot d(\rho^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \rho^2 \dot{\theta} = \underline{cte}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho_0}{z_0} \longrightarrow \rho_0 = \operatorname{tg} \alpha \, z_0$$

$$\rho_0 \dot{\theta} = v_0$$

$$\rho^2 \dot{\theta} = \operatorname{tg} \alpha \, z_0 v_0$$

ENERGÍA EN EL PUNTO MÁS ALTO

$$V + K = \frac{1}{2} m v^{*2} + m g z^* = \frac{1}{2} m \rho^{*2} \dot{\theta}^{*2} + m g z^*$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0 = \frac{1}{2} m \rho^{*2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \, z_0^2 v_0^2}{\rho^{*4}} + m g z^*$$

$$\boxed{z^* = 1.5\, z_0}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} g z_0 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{tg}^2 \alpha} \, z_0^2 v_0^2}{\cancel{\operatorname{tg}^2 \alpha} \, z^{*2}} + \cancel{m} g z^*$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 \left[1 - \frac{1}{1.5^2} \right] = g\,(1.5 - 1)\, z_0$$

$$v_0^2 = 1.8\, g z_0$$

$$\boxed{v_0 = 1.34 \sqrt{g z_0}}$$