FI 2001 MECANICA SESION 11 P.ACEITUNO

① 27/4/21

POTENCIAL GRAVITATORIO TERRESTRE (CONT.)

$$V_G(r) = -\frac{GMm}{r} + C$$

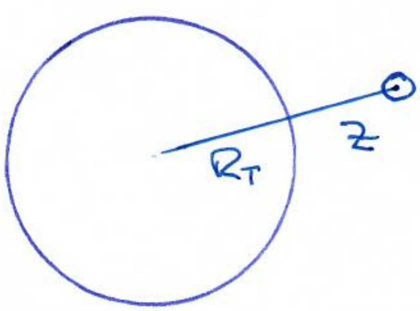
ELECCIONES PARA C

$$V_G(r)\Big|_{r\to\infty} = 0 \implies \boxed{C = 0}$$

$$V_G(r)\Big|_{r=R_T} = 0 \implies 0 = -\frac{GM_Tm}{R_T} + C$$

$$C = \frac{GM_Tm}{R_T}$$

$$\therefore \boxed{V_G(r) = -GM_Tm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right)}$$



$$R = R_T + z$$

$$V_G(z) = -GM_Tm\left(\frac{1}{R_T+z} - \frac{1}{R_T}\right)$$

$$\left(\frac{1}{R_T+z} - \frac{1}{R_T}\right) = \frac{1}{R_T}\left[\left(\frac{1}{1+z/R_T}\right) - 1\right] \qquad y = \frac{z}{R_T}$$

TAYLOR ... ALREDEDOR DE $y=0$ $\quad \frac{1}{1+y} \simeq 1-y$

$$V_0(z) = -\frac{G M_T m}{R_T}\left(-\frac{z}{R_T}\right) = \underbrace{\frac{GM}{R_T^2}}_{=g} m z$$

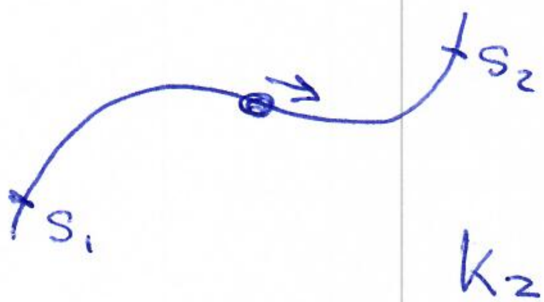
$$\boxed{V_G(z) = m g z}$$

FUERZAS NO CONSERVATIVAS ($\vec{F}_{NC}$)

SON AQUELLAS A LAS CUALES NO SE LES PUEDE ASOCIAR UNA FUNCIÓN DE POTENCIAL

EN GENERAL $\quad m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_{NC}$

$$dK = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\vec{F}_c\cdot d\vec{r}}_{-dV} + \vec{F}_{NC}\cdot d\vec{r}$$



INTEGRANDO...

$$K_2 - K_1 = -(V_2 - V_1) + \int \vec{F}_{NC}\cdot d\vec{r}$$

$$\underbrace{(K_2 + V_2)}_{E_2} - \underbrace{(K_1 + V_1)}_{E_1} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{NC}\cdot d\vec{r}$$

ΔE = TRABAJO DE FUERZAS NO CONSERVATIVAS

EC. DE MOVIMIENTO

EN UNA TRAYECTORIA FORZADA

$\hat{t}$) $m\ddot{s} = F_t$

$F_t = \vec{F}\cdot\hat{t}$ COMPONENTE DE $\vec{F}$ SEGÚN $\hat{t}$

ASÍ COMO $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ SEGÚN $\hat{i}$

$$\boxed{F_t = -\frac{\partial V}{\partial s}}$$

★ $m\ddot{s} = -\frac{\partial V}{\partial s}$

PUNTO DE EQUILIBRIO (O POSICIONES DE EQUILIBRIO)

SON AQUELLAS DONDE

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

SI s^* ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO

ENTONCES $\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{s=s^*} = 0$

COLOCADA UNA PARTÍCULA EN $s = s^*$

EN REPOSO, PERMANECE EN ESE ESTADO

COMPORTAMIENTO ALREDEDOR DE PUNTO DE EQUILIBRIO, CUANDO LA PARTÍCULA ES FORZADA A SEGUIR UNA TRAYECTORIA.

SUPONGAMOS QUE S^* ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO

$$m\ddot{s} = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

EN EL ENTORNO DE $S = S^*$

$$V(s) = V(s_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{s^*}}_{=0}(s-s^*) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*}(s-s^*)^2 + \ldots$$

PORQUE S^* ES PUNTO DE EQUILIBRIO

$$-\frac{dV}{\partial s} = -\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*}(s-s^*)$$

EC. DE MOVIMIENTO: $m\ddot{s} = -\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*}(s-s^*)$

SEA $s' = s - s^*$ (LA DISTANCIA A S^*)

$$\ddot{s}' = \ddot{s}$$

$$\boxed{\ddot{s}' + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*} s' = 0}$$

a) $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*} > 0 \rightarrow \left.\frac{1}{m}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*} = \omega_0^2$

$$\ddot{s}' + \omega_0^2 s' = 0 \quad (M.A.S)$$

EQUILIBRIO ESTABLE

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\left.\frac{1}{m}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*}}$$

PERIODO DE PEQUEÑAS OSCILACIONES

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*}}}$$

b) $\left.\frac{d^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*} < 0 \rightarrow \left.\frac{1}{m}\frac{d^2 V}{d s^2}\right|_{s^*} = -\omega_1^2$

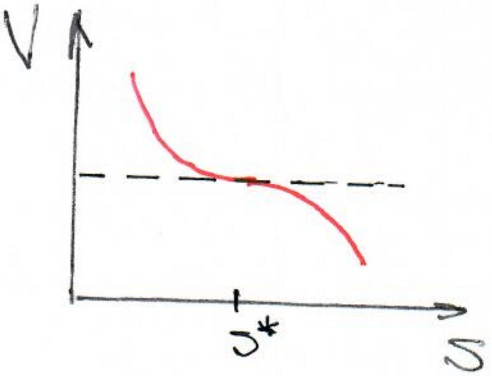
$$\ddot{s}' - \omega_1^2 s' = 0 \rightarrow \ddot{s}' = \omega_1^2 s'$$

LA SOLUCIÓN ES DEL TIPO $s'(t) = Ae^{\omega_1 t} + Be^{-\omega_1 t}$

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

EQUILIBRIO INESTABLE !!

c) $\left.\frac{d^2 V}{\partial s^2}\right|_{s^*} = 0$ PUEDE SER EQUILIBRIO INESTABLE O ESTABLE



EN s^* $\left.\dfrac{\partial V}{\partial s}\right|_{s^*} = 0$

(PUNTO DE INFLEXIÓN)

$$F_t = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

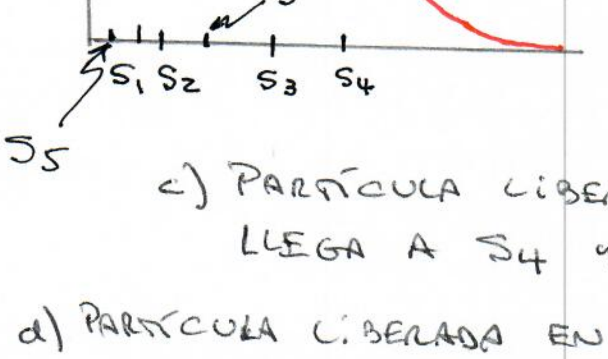
A LA DERECHA DE s^* $\dfrac{\partial V}{\partial s} < 0 \rightarrow F_t > 0$

∴ LA PARTÍCULA SE ALEJA DE s^*

A LA IZQUIERDA DE s^* $\dfrac{\partial V}{\partial s} < 0$ $F_t > 0$

∴ LA PARTÍCULA SE APROXIMA A s^*

UNA INSPECCIÓN DE $V(s)$ PERMITE EVALUAR LOS MOVIMIENTOS POSIBLES EN UNA DETERMINADA TRAYECTORIA OBLIGADA.

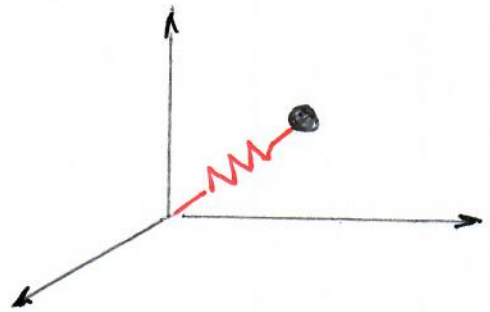


a) PARTÍCULA QUE SE LIBERA DESDE EL REPOSO EN S_2 QUEDARÁ MOVIÉNDOSE ENTRE S_2 Y S_3

b) IDEM SI SE LIBERA EN S_3

c) PARTÍCULA LIBERADA DESDE EL REPOSO EN S_1 LLEGA A S_4 Y QUEDA EN REPOSO (EQ. INESTABLE)

d) PARTÍCULA LIBERADA EN S_5 SE ALEJA HASTA EL INFINITO SU RAPIDEZ AUMENTA HASTA s^* LUEGO DISMINUYE HASTA S_4 Y LUEGO VUELVE A AUMENTAR

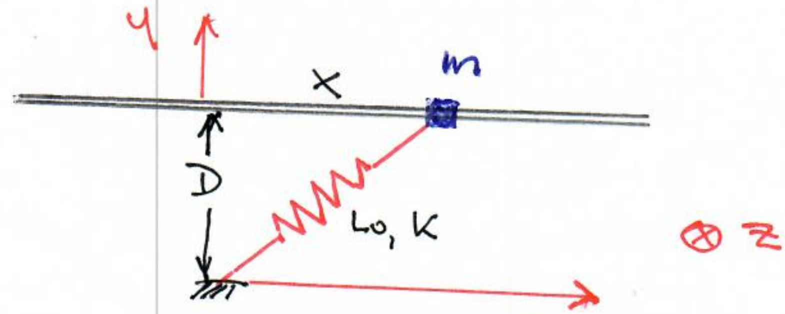


F. RESORTE

$$\vec{F} = -k(r-L_0)\hat{r}$$

POTENCIAL ASOCIADO

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \qquad V = \frac{1}{2}k(r-L_0)^2$$



EXISTE SOLO MOVIMIENTO EN LA DIRECCION X

EC. MOV. $$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$r = (D^2+x^2)^{1/2}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}k\left[(D^2+x^2)^{1/2} - L_0\right]^2$$

PUNTO DE EQUILIBRIO

$$\frac{dV}{dx} = 0 \qquad k[\ ./.\ ]\frac{1}{\cancel{2}}(D^2+x^2)^{-1/2}\cdot\cancel{2}x = 0$$

a) $x_1 = 0$

b) $x_{2,3} = \pm(L_0^2 - D^2)^{1/2}$ $\boxed{\text{Si } L_0 > D}$

ANÁLISIS DEL TIPO DE EQUILIBRIO

a) $\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1}$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{K\left[(D^2+x^2)^{1/2} - L_0\right]}{(D^2+x^2)^{1/2}} \cdot x$$

$$\frac{dV}{dx} = G(x)\, x$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dG}{dx}\, x + G(x)$$

EN $x=0$ $\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = G(0) = \dfrac{K(D-L_0)}{D}$

$D > L_0 \longrightarrow \left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} > 0$ EQ. ESTABLE

PERIODO PEQ. OSCILACIONES $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m D}{K(D-L_0)}}$$

$D < L_0$ $\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right| < 0$ EQ. INESTABLE

b) $x_{2,3} = \pm (L_0^2 - D^2)^{1/2}$ $\quad$ $L_0 > D$

$$\frac{dV}{dx} = k\left[1 - L_0 (D^2 + x^2)^{-1/2}\right] x$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{2,3}} = k\,\frac{(L_0^2 - D^2)}{L_0^2}$$

COMO $L_0 > D \implies \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{2,3}} > 0$

EQ. ESTABLE

PERIODO PEQ. OSC.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\frac{L_0^2}{(L_0^2 - D^2)}}$$