Auxiliar 11

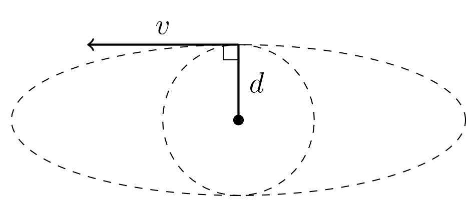
Fuerzas centrales y energía

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.-

Desde la Estación Espacial Internacional, que tiene una órbita aproximadamente circular de radio d centrada en la Tierra, se lanza con velocidad v un pequeño satélite para que quede orbitando el planeta.

1. Calcule el rango de valores de v tal que el satélite no escape de la atracción de la Tierra.
2. Asumiendo que la velocidad inicial cumple con la condición anterior, calcule la distancia máxima del satélite al centro de la Tierra.



Respuesta:

Queda propuesto hacer este problema con segunda ley de Newton en coordenadas polares, ya que se puede obtener una ecuación en función de la distancia y su aceleración radial (el movimiento se da en un plano al haber únicamente una fuerza central), por lo que se puede integrar y hacer un razonamiento similar al que se hará ahora para el ítem 2.

Usaremos energía para resolver ambos ítems. Sabemos que el satélite, que podemos asumir como una partícula, tiene una velocidad inicial y el potencial está dado por el potencial gravitatorio de la forma

$$V_{grav} = -G\frac{mM}{r}.$$

La condición para que la partícula esté a punto de desligarse de la atracción a la Tierra es que ya no esté bajo la influencia del potencial generado, por lo que consideramos que la energía potencial final es 0, y para que la velocidad que calculemos sea la mínima para que esto se cumpla decimos que la velocidad final es nula (si v_f fuese mayor a 0, nos dice que inicialmente al satélite le imprimimos una velocidad mayor a la necesaria), así que la energía mecánica final debe ser nula.

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - G\frac{mM}{d} = 0,$$

conocemos la distancia inicial con la que es lanzado el satélite, así que despejamos la velocidad,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{d}} = v.$$

Habiendo calculado la velocidad con la que fue lanzado nuestro satélite volvemos a ocupar la conservación de la energía mecánica. Conocemos la energía inicial, así que, en coordenadas polares, nos queda la ecuación:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{d} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2) - G\frac{mM}{\rho}, \tag{1}$$

donde nos interesa calcular $\rho_{máx}$.

Sabemos que cuando la partícula alcanza la distancia máxima al centro de la Tierra, la velocidad radial es 0 (deja de alejarse, pero sigue manteniendo una velocidad angular) y el término $\rho\dot{\phi}$ se puede reemplazar ocupando la conservación del momentum angular, ya que ocupando la segunda ley de Newton tenemos la ecuación:

$$m\left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi}\right) = -G\frac{mM}{\rho^2}\hat{\rho},$$

como no tenemos fuerzas en la dirección de $\hat{\phi}$, la ecuación para este eje nos queda:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$$
$$\Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \text{constante},$$

como conocemos la velocidad y distancia inicial tenemos que el momentum angular inicial (que se conserva) es ${\rho_0}^2\dot{\phi}_0 = v \cdot d$, reemplazamos,

$$\rho^2\dot{\phi} = vd$$
$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{vd}{\rho^2}$$

. Ahora, reemplazando la expresión de la velocidad angular y de la velocidad inicial e imponiendo que $\dot{\rho}|_{\rho_{máx}} = 0$ en la ecuación (1), podemos despejar el radio máximo.

$$\frac{1}{2}m\frac{2GM}{d} - G\frac{mM}{d} = \frac{1}{2}m\left(\cancelto{0}{\dot{\rho}^2} + {\rho_{máx}}^2\frac{v^2d^2}{{\rho_{máx}}^4}\right) - G\frac{mM}{\rho_{máx}}$$
$$\Rightarrow \rho_{máx} = d,$$

o sea, la distancia máxima que alcanza el satélite es el radio de la órbita de la Estación Espacial. Además, algo curioso es que la condición de $\dot{\rho} = 0$ también se cumple para la distancia mínima, así que $\rho_{mín} = \rho_{máx}$ y como la distancia del satélite está acotada dentro de estos valores

$$d = \rho_{mín} \leq \rho \leq \rho_{máx} = d$$
$$\Rightarrow \rho = d = \text{constante},$$

o sea, que el satélite sigue una órbita circular alrededor de la Tierra, acompañando a la ISS.

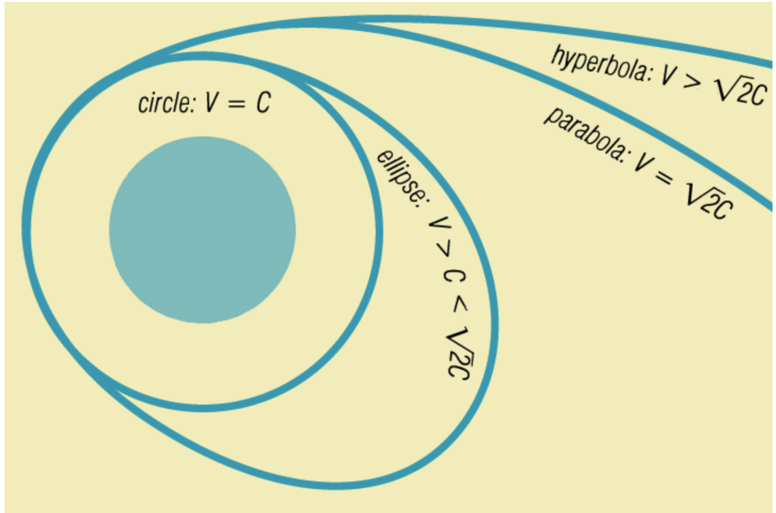
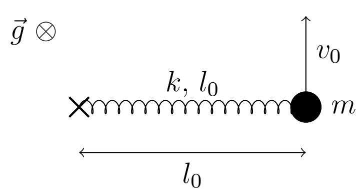


Figura 1: Órbitas para distinas velocidades iniciales, con $C = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$.

P2.-

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$. Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



Respuesta

Para este problema usamos la conservación de la energía mecánica, ya que no hay fuerzas disipativas, además tenemos que se conserva el momentum angular, debido a que no hay fuerzas actuando en $\hat{\phi}$, así que usando coordenadas polares obtenemos que:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\phi})}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \text{constante}.$$

Como en un primer instante el resorte se encuentra en su largo natural, solo hay energía cinética dada por la velocidad v_0,

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2,$$

y por conservación del momentum angular tenemos que $\rho^2\dot{\phi} = l_0 v_0$.

Para este caso, la energía mecánica de forma general está dada, en coordenadas polares, por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2.$$

Sabemos que en el momento en el que el resorte alcance su máxima elongación, la masa se detiene en el eje radial (deja de alejarse), o sea, $\dot{r} = 0$, utilizando que la posición en este caso es $4l_0$ y utilizando la conservación del momentum angular, obtenemos que la energía es:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0 v_0}{4l_0}\right)^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2,$$

que tiene que ser igual a la energía inicial,

$$\frac{1}{32}m{v_0}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_0}^2 = \frac{48}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2.$$

Para calcular la velocidad máxima del movimiento pensamos en que cuando se conserva la energía total se genera un equilibrio entre la energía cinética y la potencial (sumadas deben dar E), entonces la energía cinética (la velocidad) alcanza su máximo valor cuando la energía potencial es 0, en este caso eso sucede cuando el resorte está en su largo natural donde sabemos que la velocidad es v_0,

$$\Rightarrow v_{máx} = v_0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la energía cinética toma su valor mínimo cuando la potencial alcanza su valor máximo, que para la velocidad v_0 calculada, la elongación máxima es $4l_0$, así que ocupamos que la energía total inicial es igual a la energía mecánica cuando la velocidad es mínima,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{mín}}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_{mín}}^2 = \frac{3}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2$$