Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-3 Mecánica

Auxiliar 1: Álgebra vectorial y cinemática

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Daniel Lobos
Enrique Navarro

14 de marzo de 2022

P1. [**Propuesto**] Considere tres vectores conocidos $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

a) Demostrar que el triple producto escalar de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, escrito como $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$, es invariante (no cambia su valor) ante el intercambio de las operaciones de producto escalar y vectorial, es decir, demostrar que

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \cdots$$

Calcular el valor que toma cuando un par de vectores es idéntico. Calcular el volumen de un paralelepípedo definido por los tres vectores en el caso en que ninguno es colineal con los otros, y relaciónelo con el triple producto escalar.

b) Demostrar que el triple producto vectorial se expresa como

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

Sea $\vec{r}$ un vector desconocido que satisface las relaciones

$$\vec{a}\times\vec{r} = \vec{b} \qquad \text{y} \qquad \vec{a}\cdot\vec{r} = \phi,$$

con ϕ conocido. Expresar $\vec{r}$ en términos de $\vec{a}$, $\vec{b}$, ϕ y la magnitud de $\vec{a}$.

P2. **a)** Determinar la superficie descrita por $\vec{r}\cdot\vec{a} = \text{cte}$ cuando $\vec{a}$ es un vector de magnitud y dirección constante desde un origen y $\vec{r}$ es el vector posición desde ese origen hasta un punto $P(x, y, z)$ sobre la superficie. Intersectar dos superficies

$$\vec{r}\cdot\vec{a} = \alpha \qquad \text{y} \qquad \vec{r}\cdot\vec{b} = \beta,$$

con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores constantes no paralelos, y α y β constantes reales conocidas, y determinar la ecuación de la curva que describe la intersección.

b) Sea $\vec{a}$ un vector arbitrario y $\hat{e}$ un vector unitario en una dirección fija en el espacio. Demostrar que el vector $\vec{a}$ admite una descomposición del tipo

$$\vec{a} = \hat{e}(\vec{a}\cdot\hat{e}) + \hat{e}\times(\vec{a}\times\hat{e})$$

y explicar el significado geométrico de cada uno de los términos de esta expansión.

c) Demostrar que un vector unitario $\hat{c}$ que depende de una variable s, es decir, $\hat{c} = \hat{c}(s)$, cumple

$$\hat{c}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{c}}{\mathrm{d}s} = 0.$$

P3. Una partícula se mueve con rapidez v_0 constante sobre un riel circular de radio R colocado en posición horizontal sobre una superficie también horizontal. La partícula se encuentra atada mediante una cuerda inextensible a un bloque que cuelga debajo de un agujero localizado a una distancia $R/2$ del centro del riel. Suponga que v_0 es suficientemente pequeño para que la cuerda no se destense.

a) Determine la rapidez del bloque en función del ángulo θ.

b) Obtenga la rapidez máxima del bloque.

c) Determine la aceleración $\vec{a}$ del bloque cuando la partícula que se mueve sobre el riel pasa por la posición $\theta = 0$.

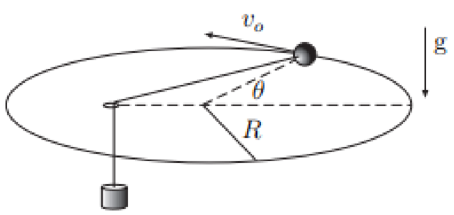

Figura 1