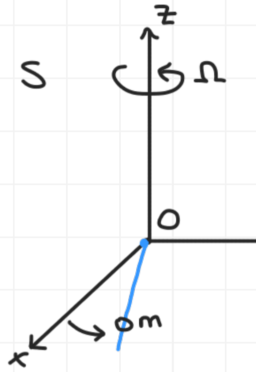
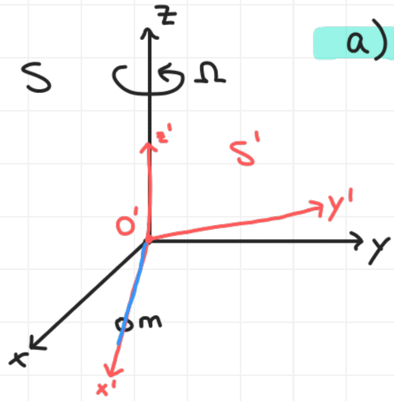
P1



la vara rota según Ω c/r al origen O



a) S' rota siguiendo a la vara en su eje x'

- no hay gravedad
- hay roce cinético μ_c

b) • determinar fza. centrífuga y de Coriolis en S' que actúan sobre la argolla

$$\vec{F}_{centrífuga} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') \qquad \vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,'$$

hay que determinar $\vec{\Omega}$, $\vec{r}\,'$ y $\vec{v}\,'$ en la base del sistema S' para la argolla de masa m.

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}, \quad \text{pero} \quad \hat{z} = \hat{z}', \quad \boxed{\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}'}$$

si ρ es la distancia desde el origen hasta la argolla, entonces

$$\vec{r}\,' = \rho\hat{x}' \longrightarrow \vec{v}\,' = \frac{d}{dt}\vec{r}\,' = \dot{\rho}\hat{x}'$$

calculando la fza. centrífuga:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') = -m\Omega\hat{z}'\times(\Omega\hat{z}'\times\rho\hat{x}')$$

$$= -m\Omega^2\rho\,\hat{z}'\times\underbrace{(\hat{z}'\times\hat{x}')}_{+\hat{y}'}$$

$$= -m\Omega^2\rho\,\underbrace{\hat{z}'\times\hat{y}'}_{-\hat{x}'}$$

$$\boxed{\vec{F}_{cent} = m\Omega^2\rho\,\hat{x}'} \longrightarrow \text{es función de } \rho$$

calculando la fza. de Coriolis:

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' = -2m\Omega\hat{z}'\times\dot{\rho}\hat{x}'$$

$$\boxed{\vec{F}_{cor} = -2m\Omega\dot{\rho}\,\hat{y}'}$$

c) • ec. de mov. en S', ec. para fza. normal

$$m\vec{a}' = \vec{F} \qquad\qquad \vec{a}' = \frac{d}{dt}\dot{\rho}\hat{x}' = \ddot{\rho}\hat{x}'$$

$$m\ddot{\rho}\hat{x}' = \vec{F}_{roce} + \vec{N} + \vec{F}_{cent} + \vec{F}_{cor}$$

$$\vec{F}_{roce} = -F_{roce}\hat{x}' \qquad \vec{N} = N\hat{y}'$$

$$\boxed{m\ddot{\rho}\hat{x}' = -F_{roce}\hat{x}' + N\hat{y}' + m\Omega^2\rho\hat{x}' - 2m\Omega\dot{\rho}\hat{y}'} \qquad (*)$$

$$(1)\begin{cases} m\ddot{\rho} = -F_{roce} + m\Omega^2\rho \\ 0 = N - 2m\Omega\dot{\rho} \longrightarrow \boxed{N = 2m\Omega\dot{\rho}} \quad (2) \end{cases}$$

d) • condiciones para que la argolla esté estática c/r a la vara.

las condiciones son $\dot{\rho}=0$ y $\ddot{\rho}=0$, por lo tanto

$$(2) \longrightarrow N=0 \longrightarrow F_{roce} = \mu N = 0$$

$$(1) \rightarrow 0 = m\Omega^2\rho \longrightarrow \boxed{\rho = 0}$$

la única forma de estar quieta c/r a la barra es estando en el origen

e) • resolver (*) suponiendo $\rho(t=0)=0$ y $\dot{\rho}(t=0)=v_0$

$$m\ddot{\rho} = -F_{roce} + m\Omega^2\rho$$

$$m\ddot{\rho} = -\mu_c N + m\Omega^2\rho$$

$$m\ddot{\rho} = -\mu_c \cdot 2m\Omega\dot{\rho} + m\Omega^2\rho$$

$$(3) \quad \ddot{\rho} + 2\mu_c\Omega\dot{\rho} - \Omega^2\rho = 0 \longrightarrow \text{ec. de mov en } \rho$$

ansatz: $\rho(t) = Ae^{\lambda t} \longrightarrow \dot{\rho} = A\lambda e^{\lambda t} \longrightarrow \ddot{\rho} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

$$(3) \rightarrow \lambda^2 + 2\mu_c\Omega\lambda - \Omega^2 = 0 \quad \text{(ec. de polinomio característico)}$$

$$\lambda = \frac{-2\mu_c\Omega \pm \sqrt{4\mu_c^2\Omega^2 + 4\Omega^2}}{2}$$

$$\lambda_\pm = \Omega \cdot \left(-\mu_c \pm \sqrt{\mu_c^2+1}\right) = -\mu_c\Omega \pm \Omega\sqrt{\mu_c^2+1}$$

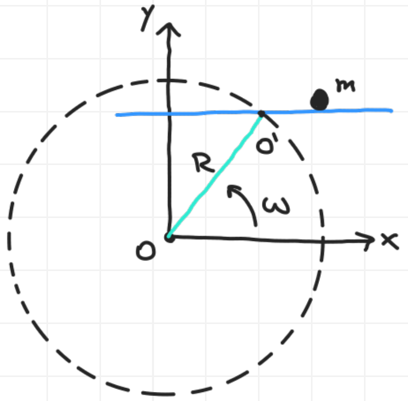
$$\begin{cases} p(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t} & , \quad p(0)=0 \rightarrow A+B=0 \rightarrow B=-A \\ \dot{p}(t) = A\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - A\lambda_- e^{\lambda_- t} & , \quad \dot{p}(0)=v_0 \rightarrow A(\lambda_+ - \lambda_-) = v_0 \end{cases}$$

$$\lambda_+ - \lambda_- = 2\Omega\sqrt{\mu_c^2+1} \longrightarrow A = \frac{v_0}{2\Omega\sqrt{\mu_c^2+1}} \quad , B=-A$$

$$\boxed{p(t) = \frac{v_0}{2\Omega\sqrt{\mu_c^2+1}} e^{-\mu_c\Omega t}\left(e^{\Omega\sqrt{\mu_c^2+1}\,t} - e^{-\Omega\sqrt{\mu_c^2+1}\,t}\right)}$$

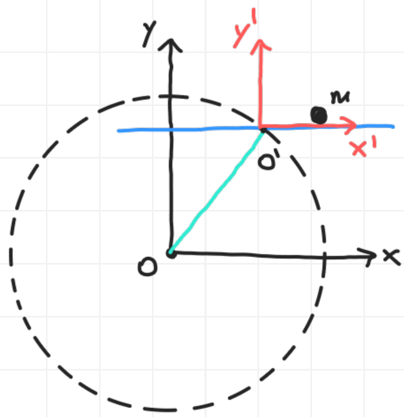
P2

a)



S centrado en O

↓ $\vec{g}$



S' centrado en O', móvil según S con vel angular ω

<u>fuerzas en S'</u> $\quad m\vec{g} = -mg\hat{y}' \qquad \vec{N} = N\hat{y}'$

<u>aceleración</u>

$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}' +$ términos con $\vec{\Omega}$

rotación de S' c/r a S (no hay)

$\vec{r}_{o'} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y}$

pos. de O' c/r a S

$\vec{a}_{o'} = \ddot{\vec{r}}_{o'} = -R\dot{\theta}^2(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) \qquad / \dot{\theta} = \omega$

$\vec{a}' = \ddot{x}\,\hat{x}'$ (solo hay mov. en la plataforma)

<u>Newton</u>

$m\vec{a} = \vec{F}$

$m\left[-R\omega^2(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) + \ddot{x}\,\hat{x}'\right] = (N - mg)\,\hat{y}'$

$\hat{x} = \hat{x}'$
$\hat{y} = \hat{y}'$

$m(\ddot{x} - R\omega^2\cos\theta)\,\hat{x}' - mR\omega^2\sin\theta\,\hat{y}' = (N - mg)\,\hat{y}'$

$$\boxed{\begin{cases} (1) & \ddot{x} = R\omega^2\cos\theta \\ (2) & mR\omega^2\sin\theta = mg - N \end{cases}} \qquad \begin{matrix} (\hat{x}') \\ (\hat{y}') \end{matrix}$$

b) • máx. dist. desde O' en la plataforma

$(1) \rightarrow \quad \ddot{x} = R\omega^2 \cos\theta$

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = R\omega \sin\theta \qquad / \ \dot{x}_0 = 0$$

$$(*) \quad \dot{x} = R\omega \sin\theta$$

el máx. ocurre cuando $\dot{x} = 0$

$$0 = \sin\theta$$

$$\theta = 0, \pi, \ldots$$

integrando $\dot{x}$,

$$x - x_0 = -R(\cos\theta - 1) \qquad / \ x_0 = 0 \quad \text{parte en } O'$$

$$x = R(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(\theta=0) = 0 \quad \longrightarrow \text{mín} \\ x(\theta=\pi) = 2R \quad \longrightarrow \text{máx.} \end{array}}$$

c) • máx. ω para no despegue.

no despegue $\longrightarrow N > 0$

$(2) \rightarrow \quad N = m(g - R\omega^2 \sin\theta)$

$$g - R\omega^2 \sin\theta > 0$$

$$\omega^2 < \frac{g}{R\sin\theta} \longrightarrow \text{se debe cumplir para todo } \theta$$

para que no haya despegue

$$\sin\theta = 1 \longrightarrow \omega_{máx} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$\downarrow$

minimiza la fuerza normal