FI2001-4 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.

Desarrollo Auxiliar 9: Dinámica del centro de masa.

21 de Abril del 2022

P1. Cono de helado cayendo:

a) Para entender cómo abordar cuantitativamente este problema conviene hacer un análisis cualitativo de la situación. Si ubicamos un cono de helado de manera perfectamente vertical entonces tendremos un equilibrio entre el peso de este cuerpo y la fuerza normal que ejerce la superficie de apoyo, de tal manera que no existe traslación. Por otro lado estas fuerzas actúan en una dirección paralela al eje de simetría del cono de helado, por lo tanto no generan ningún torque respecto al único punto alrededor del cual podría rotar, que corresponde al punto de apoyo con el suelo (ver Figura 1). Esto permite que exista un equilibrio que, a pesar de ser inestable, puede permanecer vigente por un largo tiempo[1], hasta que alguna perturbación haga que se incline ligeramente en una dirección fuera de la vertical. Una vez que esto pasa, y si existe suficiente roce con la superficie de apoyo, el peso genera un torque sobre el cuerpo que favorece una rotación hacia el suelo (ver Figura 1), lo que puede traducirse en que el torque del peso genera una aceleración angular sobre el cono. Con esto podemos entender que la ecuación de movimiento $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\theta)$ involucra términos asociados al peso del cono de helado, además podemos entender que la forma de abordar este problema es a través de la ecuación de movimiento rotacional, la cual nos dice que el torque neto que generan las fuerzas externas (en este caso el peso) es igual al cambio del momento angular con respecto al tiempo.

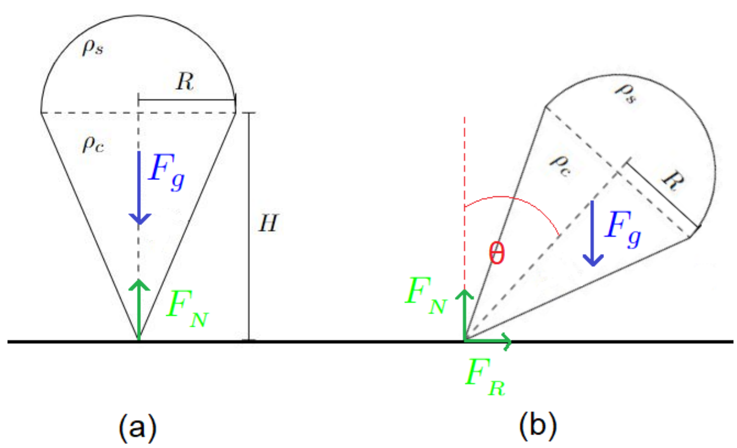

Figura 1: (a) Cono de helado vertical. (b) Cono de helado en una inclinación θ arbitraria.

Como estudiaremos la dinámica rotacional en torno al vértice del cono de helado usaremos ese punto como origen, y usaremos un sistema de ejes cartesianos tales que $\hat{x}$ es la dirección horizontal (positiva hacia la derecha) e $\hat{y}$ es la dirección vertical (positiva hacia arriba), como se muestra en la figura anterior. Ahora, si usamos este punto como origen, el torque neto $\vec{\tau}$ ejercido sobre el sistema de partículas corresponde sólo al torque del peso, ya que la fuerza normal y el roce están actuando directamente en el punto de rotación. Tomando en cuenta eso, el torque neto que se ejerce sobre el cono es:

[1]Este equilibrio es fácil de mantener con escobas: `https://www.youtube.com/watch?v=c9ulMVKxogA`

$$\vec{\tau} = \vec{r}_g \times \vec{F}_g$$

En esta expresión $\vec{r}_g$ es el punto en el cual se aplica la fuerza $\vec{F}_g$ que genera el torque. Como en este caso esa fuerza es el peso, esta fuerza se aplica en el centro de masa del cono de helado, el cual diremos que está a una distancia[2] D del vértice del cono. Usando esa distancia y el sistema de referencia mencionado anteriormente, el vector $\vec{r}_g$ se puede escribir como:

$$\vec{r}_g = D\sin(\theta)\hat{x} + D\cos(\theta)\hat{y}$$

Por otro lado el peso apunta directamente al suelo en todo momento, por lo tanto $\vec{F}_g = -Mg\hat{y}$. Con esto se tiene que:

$$\Rightarrow \; \vec{\tau} = (D\sin(\theta)\hat{x} + D\cos(\theta)\hat{y}) \times (-Mg\hat{y}) = -MgD\left[\sin(\theta)\left(\hat{x}\times\hat{y}\right) + \cos(\theta)\left(\hat{y}\times\hat{y}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \; \vec{\tau} = -MgD\sin(\theta)\left(\hat{z}\right) \; \Rightarrow \; \vec{\tau} = -MgD\sin(\theta)\hat{z}$$

Ahora, este torque genera una rotación alrededor de un eje que pasa por el vértice del cono, lo que físicamente se modela diciendo que este torque es igual a la derivada temporal del momento angular calculado usando el punto de rotación como origen. En este caso calcular el momento angular por definición puede resultar un poco difícil, ya que nuestro sistema de partículas es un objeto macizo difícil de integrar, por lo tanto usaremos el dato del enunciado y diremos que $\vec{L} = I\vec{\omega}$, donde $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular asociado a la rotación del helado en torno al vértice del cono. Usando el mismo sistema de referencia podemos tomar en cuenta que el vector $\hat{z}$ apunta perpendicular a la pantalla y saliendo de esta, entonces por regla de la mano derecha tendríamos que $\omega = -\dot{\theta}\hat{z}$, donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular asociada a la coordenada θ, y el signo negativo hace referencia a que estamos en una rotación en sentido horario (es decir, negativa). Con eso tendremos que:

$$\vec{L} = -I\dot{\theta}\hat{z} \; \Rightarrow \; \frac{d\vec{L}}{dt} = -I\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{z} \; \Rightarrow \; \frac{d\vec{L}}{dt} = -I\ddot{\theta}\hat{z}$$

Entonces, la ecuación de movimiento rotacional nos dice que esta variación del momento angular viene dada por el torque asociado a las fuerzas externas, entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \; \Rightarrow \; -I\ddot{\theta}\hat{z} = -MgD\sin(\theta)\hat{z}$$

Como ambos lados de la igualdad son vectores en la dirección $\hat{z}$, entonces podemos sólo tomar en cuenta las componentes en esta dirección, entonces:

$$\Rightarrow \; -I\ddot{\theta} = -MgD\sin(\theta) \; \Rightarrow \; \boxed{\ddot{\theta} = \frac{MgD}{I}\sin(\theta)} \tag{1}$$

Esta expresión corresponde a la ecuación de movimiento rotacional del sólido, la cual la aceleración angular del cono de helado a medida que este cae producto de la gravedad. Si el cono cayera en sentido antihorario ($\theta > 0$) entonces $\ddot{\theta} > 0$, lo cual significa que acelera en sentido antihorario, mientras que si el cono cayera en sentido horario ($\theta < 0$) entonces $\ddot{\theta} < 0$ por la imparidad de la función seno, lo cual significa que acelera en sentido horario. Esto nos dice que para cualquier inclinación del cono se induce una aceleración que favorece inevitablemente la caída de este objeto hacia la superficie horizontal.

[2]Esta distancia se calculó en la P2 de la clase auxiliar 7.

b) La condición de que un objeto se despegue de cierta superficie se estudia imponiendo que la fuerza de contacto con dicha superficie se anula en cierto punto. Tomando en cuenta eso, en este caso debemos imponer que en el ángulo crítico θ_* la fuerza normal F_N asociada a la superficie de apoyo se anula, y como debemos estudiar la fuerza normal, entonces debemos resolver la ecuación de movimiento traslacional del sólido, la cual involucra la fuerza neta (y por lo tanto cada fuerza individual) que actúa sobre este.

En este caso las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están dibujadas en la Figura 1, entonces la fuerza neta $\vec{F}$ que actúa sobre el sólido es:

$$\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_N + \vec{F}_g \;\Rightarrow\; \vec{F} = F_R\hat{x} + F_N\hat{y} - Mg\hat{y}$$

Ahora, durante la caída el centro de masa (que está a una distancia D del vértice) realiza un movimiento circunferencial, por lo tanto su aceleración es del tipo centrípeta con radio D y rapidez angular $\dot{\theta}$, entonces:

$$\vec{A}_{\text{cm}} = D\dot{\theta}^2\hat{\rho} \;\Rightarrow\; \vec{A}_{\text{cm}} = D\dot{\theta}^2\cos(\theta)\hat{x} + D\dot{\theta}^2\sin(\theta)\hat{y}$$

Tomando en cuenta una masa total M, entonces usando la 2da ley de Newton para el centro de masa se tiene que:

$$\vec{F} = M\vec{A}_{\text{cm}} \;\Rightarrow\; F_R\hat{x} + F_N\hat{y} - Mg\hat{y} = MD\dot{\theta}^2\cos(\theta)\hat{x} + MD\dot{\theta}^2\sin(\theta)\hat{y}$$

Separando en componentes se obtiene la ecuación de movimiento en cada eje cartesiano:

$$\boxed{\hat{x}}\;\; F_R = MD\dot{\theta}^2\cos(\theta) \quad ; \quad \boxed{\hat{y}}\;\; F_N - Mg = MD\dot{\theta}^2\sin(\theta)$$

A partir de la segunda ecuación es posible despejar la fuerza normal:

$$\Rightarrow\; F_N = Mg + MD\dot{\theta}^2\sin(\theta) \tag{2}$$

Podemos notar que esta expresión aún está incompleta, ya que depende de la velocidad angular $\dot{\theta}$. Esta velocidad se puede obtener en función del ángulo θ a partir de la ecuación de movimiento rotacional mostrada en (1) usando la siguiente relación para las derivadas:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

Reemplazando en la expresión (1) se puede integrar, para lo cual recordamos que el cono cae ($\dot{\theta}(0) = 0$) desde el ángulo $\theta(0) = 0$. Entonces:

$$\ddot{\theta} = \frac{MgD}{I}\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{MgD}{I}\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{MgD}{I}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \left[-\frac{MgD}{I}\cos(\theta)\right]\Bigg|_0^{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2 = \frac{2MgD}{I} - \frac{2MgD}{I}\cos(\theta)$$

Entonces, reemplazando esto en la expresión (2) para la fuerza normal se tiene que:

$$\Rightarrow\; F_N(\theta) = Mg + \frac{2M^2gD^2}{I}\sin(\theta)(1 - \cos(\theta))$$

Ahora, si queremos el ángulo crítico θ_* tal que el objeto se despegue del piso necesitamos el ángulo tal que esta expresión se anula, es decir:

$$F_N(\theta_*) = 0 \;\Rightarrow\; Mg + \frac{2M^2gD^2}{I}\sin(\theta_*)(1-\cos(\theta_*)) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin(\theta_*)(\cos(\theta_*)-1) = \frac{I}{2MD^2}}$$

Esta ecuación no se puede resolver de forma analítica[3], pero nos permite tener una expresión para calcular el ángulo crítico.

[3]Esto es un ejemplo de una *ecuación trascendente.*