

Por ejemplo, consideremos una partícula en un plano. Las ecuaciones de Lagrange para la partícula en coordenadas cartesianas $\{q_i\} = \{x, y\}$ tienen la misma forma que las correspondientes ecuaciones en coordenadas polares $\{Q_i\} = \{r, \varphi\}$, donde las relaciones $q_i = q_i(Q_j, t)$ son

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

1.6. Ejemplos de ecuaciones de Lagrange para varios sistemas.

1. Péndulo simple.

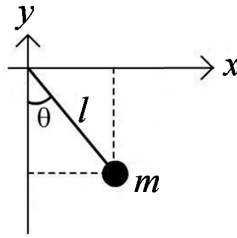


Figura 1.34: Coordenada generalizada θ para el péndulo simple.

Vimos que la coordenada generalizada es el ángulo θ . Entonces,

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta, & \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \\y &= -l \cos \theta, & \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

Expresamos T y V en función de θ y $\dot{\theta}$,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (1.204)$$

$$V = mgy = -mgl \cos \theta. \quad (1.205)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.206)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1.207)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.49

Calculamos los términos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}. \quad (1.208)$$

Luego, la ecuación de Lagrange queda como

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0, \quad (1.209)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \quad (1.210)$$

que es la conocida ecuación del péndulo simple.

2. Oscilador armónico.

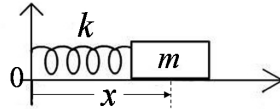


Figura 1.35: Oscilador armónico simple.

Usando la coordenada generalizada x , tenemos

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2, \quad (1.211)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (1.212)$$

La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (1.213)$$

Calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx. \quad (1.214)$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned} \quad (1.215)$$

donde $\omega^2 \equiv k/m$.

3. Partícula libre.

La condición de estar libre significa que no hay fuerza neta sobre la partícula, $\mathbf{F} = -\nabla V = 0$. Luego, $V = \text{constante}$ para una partícula libre.

a) El Lagrangiano en coordenadas cartesianas es

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1.216)$$

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.217)$$

conducen a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i = \text{constante}, \quad (1.218)$$

que expresan la conservación de la componente i del momento lineal de la partícula.

b) Lagrangiano en coordenadas esféricas.

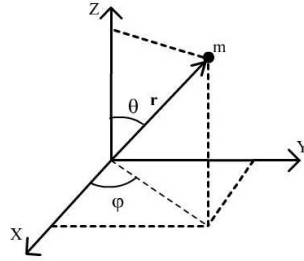


Figura 1.36: Coordenadas esféricas para una partícula.

Las coordenadas se expresan como

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.219)$$

Las velocidades son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Substitución en L da

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta). \quad (1.221)$$

4. Partícula moviéndose sobre un cono invertido.

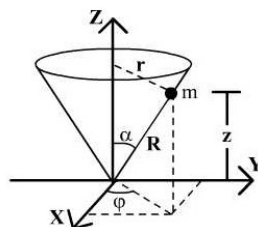


Figura 1.37: Partícula sobre un cono invertido.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \varphi$ y $q_2 = r$. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= r \cot \alpha. \end{aligned} \quad (1.222)$$

Las velocidades correspondientes son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cot \alpha. \end{aligned} \quad (1.223)$$

Energía cinética,

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 (1 + \cot^2 \alpha) + r^2 \dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2). \end{aligned} \quad (1.224)$$

Energía potencial,

$$V = mgz = mgr \cot \alpha. \quad (1.225)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano $L = T - V$ es

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2) - mgr \cot \alpha. \quad (1.226)$$

La ecuación de Lagrange para φ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.227)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.228)$$

Luego,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \equiv l_z. \quad (1.229)$$

La cantidad constante es la componente l_z del momento angular en términos de las coordenadas generalizadas, lo que se puede verificar calculando la componente cartesiana $l_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x})$, y usando las Ecs. (1.222) y (1.223). La componente l_z se conserva porque la componente τ_z del vector de torque total producido por las fuerzas actuantes sobre la partícula (su peso y la fuerza normal ejercida por la superficie del cono) es cero.

La ecuación de Lagrange para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (1.230)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha. \quad (1.231)$$

Luego,

$$\ddot{r} \csc^2 \alpha - r\dot{\varphi}^2 + g \cot \alpha = 0, \quad (1.232)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (1.233)$$

5. Péndulo doble.

Consiste en un péndulo de longitud l_1 y masa m_1 , del cual cuelga un segundo péndulo de longitud l_2 y masa m_2 .

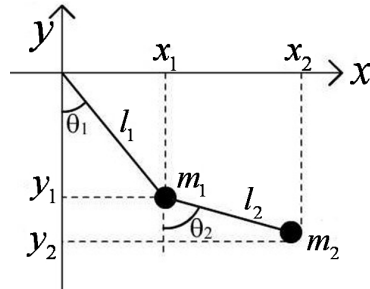


Figura 1.38: Péndulo doble.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$. Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & \Rightarrow \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 & \Rightarrow \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.234)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 & \Rightarrow \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (1.235)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.53

La energía cinética de partícula 1 es

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2. \quad (1.236)$$

La energía cinética de partícula 2 es

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Las energías potenciales de las partículas se pueden expresar como

$$V_1 = m_1gy_1 = -m_1gl_1\cos\theta_1 \quad (1.238)$$

$$V_2 = m_2gy_2 = -m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2). \quad (1.239)$$

La energía cinética del sistema es $T = T_1 + T_2$ y la energía potencial es $V = V_1 + V_2$. El Lagrangiano del sistema es $L = T - V$, lo que conduce a

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \quad (1.240)$$

Ecuación de Lagrange para θ_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (1.241)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_1l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ_1 queda

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ + m_1l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.242)$$

Ecuación de Lagrange para θ_2 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad (1.243)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Lagrange para θ_2 queda

$$\begin{aligned}m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0.\end{aligned}\quad (1.244)$$

Las ecuaciones de Lagrange para θ_1 y θ_2 se pueden expresar como

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - \mu \sin \theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (1.245)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (1.246)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $\mu \equiv 1 + m_1/m_2$.

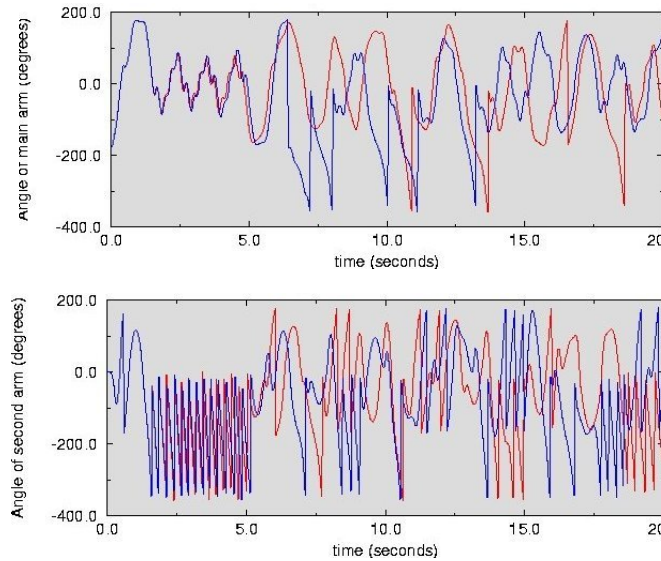


Figura 1.39: Caos en el péndulo doble. Arriba: θ_1 vs. t . Abajo: θ_2 vs. t . En ambos casos, se muestra la evolución a partir de dos condiciones iniciales muy cercanas.

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.55

Las ecuaciones de Lagrange para θ_1 y θ_2 son no lineales y acopladas para θ_1 y θ_2 , dando lugar a la posibilidad de la aparición de *comportamiento caótico* en este sistema para cierto rango de valores de parámetros.

El fenómeno de *caos* consiste en la sensibilidad extrema de la evolución de un sistema dinámico determinista ante cambios en las condiciones iniciales del mismo, lo que conlleva a limitaciones en la predicción del comportamiento de sistemas deterministas. Una condición necesaria para la ocurrencia de caos es la existencia de no linealidad en las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. El caos es un fenómeno muy común en la Naturaleza, donde abundan los sistemas no lineales.

Si consideramos el límite de pequeñas oscilaciones, $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow 0$, las ecuaciones de movimiento pueden linealizarse usando la aproximación $\sin x \approx x$, y $\cos x \approx 1$, para $x \rightarrow 0$, quedando

$$\ddot{\theta}_1 \approx \frac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{l_1(\mu - 1)} \quad (1.247)$$

$$\ddot{\theta}_2 \approx \frac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - 1)}. \quad (1.248)$$

Note que, en este caso, no se observa caos; el movimiento del sistema consiste en la superposición de dos modos de oscilación periódica con sus correspondientes frecuencias: un modo en fase ($\theta_1 = \theta_2$) y otro modo en fases opuestas ($\theta_1 = -\theta_2$). (Capítulo 4).

6. Péndulo con soporte deslizante horizontalmente sin fricción.

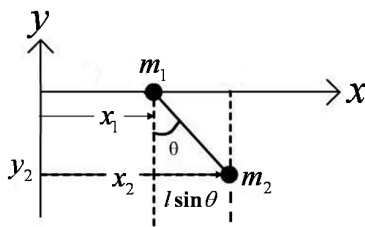


Figura 1.40: Péndulo con soporte deslizante.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = x_1$ y $q_2 = \theta$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l \sin \theta, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l\dot{\theta} \cos \theta \\ y_2 &= -l \cos \theta, & \dot{y}_2 &= l\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}l \cos \theta). \quad (1.249)$$

Energía potencial,

$$V = m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \theta. \quad (1.250)$$

Lagrangiano,

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}l \cos \theta) + m_2 g l \cos \theta. \quad (1.251)$$

Ecuación de Lagrange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad (1.252)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2\dot{\theta}l \cos \theta. \quad (1.253)$$

Luego, la ecuación para x_1 queda

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2l\dot{\theta} \cos \theta = \text{cte} \equiv P_x, \quad (1.254)$$

esta ecuación expresa la conservación de la componente P_x del momento lineal total en dirección del eje x , puesto que no hay fuerzas netas en esa dirección.

Ecuación de Lagrange para θ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.255)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta - m_2 g l \sin \theta; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 \dot{x}_1 l \cos \theta + m_2 l^2 \dot{\theta}. \quad (1.256)$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ es

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta - \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + g \sin \theta = 0, \quad (1.257)$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta + g \sin \theta = 0. \quad (1.258)$$

7. Partícula en el campo gravitacional terrestre.

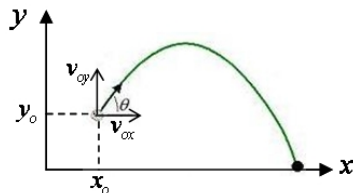


Figura 1.41: Partícula en el campo gravitacional terrestre..

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.57

El movimiento en el campo gravitacional uniforme de la Tierra ocurre en un plano vertical; i.e., $s = 2$. Tomamos las coordenadas cartesianas (x, y) como coordenadas generalizadas. Supongamos que la partícula posee posición inicial (x_o, y_o) y velocidad inicial (v_{ox}, v_{oy}) . Entonces,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy \quad (1.259)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (1.260)$$

La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.261)$$

la cual resulta en

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad (1.262)$$

$$\Rightarrow x = b_1 t + b_2, \quad (1.263)$$

con b_1 y b_2 constantes. Usando las condiciones iniciales en $t = 0$, obtenemos

$$x(t) = x_o + v_{ox}t. \quad (1.264)$$

La ecuación de Lagrange para y es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (1.265)$$

lo que conduce a

$$m\ddot{y} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g \quad (1.266)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2. \quad (1.267)$$

Usando las condiciones iniciales, podemos expresar

$$y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.268)$$

La trayectoria descrita por la partícula es una *parábola*,

$$y(x) = y_o + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}(x - x_o) - \frac{g}{2v_{ox}^2}(x - x_o)^2. \quad (1.269)$$

La trayectoria parabólica corresponde a la mínima acción; mientras que la cicloide corresponde al tiempo mínimo entre dos puntos en el campo gravitacional terrestre.

8. Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado.

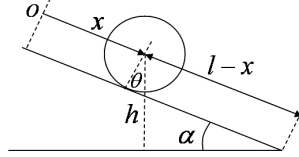


Figura 1.42: Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado.

Un punto cualquiera en el aro puede ubicarse con dos coordenadas, x y θ , las cuales están ligadas por una restricción no holonómica, que es la condición de rodar sin deslizar: $\dot{x} = R\dot{\theta}$. Luego, hay un grado de libertad; se puede escoger como coordenada generalizada a x ó a θ .

La energía cinética del aro es

$$T = T_{cm} + T'_{\text{relativa al CM}} \quad (1.270)$$

donde T_{cm} es la energía cinética de translación,

$$T_{cm} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (1.271)$$

y $T'_{\text{rel. al CM}}$ es la energía cinética de rotación,

$$T'_{\text{rel. al CM}} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(mR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2. \quad (1.272)$$

La energía potencial es

$$V = mgh = mg(l - x) \sin \alpha. \quad (1.273)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mg(l - x) \sin \alpha. \quad (1.274)$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \dot{x}/R$ en L , obtenemos

$$L = m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha - mgl \sin \alpha. \quad (1.275)$$

El término constante $mgl \sin \alpha$ se puede suprimir en L , pues no afecta las ecuaciones de movimiento. La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.276)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}. \quad (1.277)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.59

Luego,

$$\ddot{x} - \frac{g}{2} \sin \alpha = 0. \quad (1.278)$$

El aro baja por el plano rodando sin deslizar, con la mitad de la aceleración que tendría si simplemente deslizará sin fricción.

9. Péndulo de longitud l y masa m cuyo soporte gira en un círculo de radio a en un plano vertical, con velocidad angular constante ω .

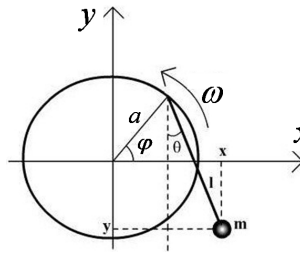


Figura 1.43: Péndulo con soporte en movimiento circular uniforme.

Expresamos $\phi = \omega t$. Luego,

$$x = a \cos \omega t + l \sin \theta, \quad \dot{x} = -\omega a \sin \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.279)$$

$$y = a \sin \omega t - l \cos \theta, \quad \dot{y} = \omega a \cos \omega t + l \dot{\theta} \sin \theta. \quad (1.280)$$

Energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}(\sin \theta \cos \omega t - \cos \theta \sin \omega t)]. \quad (1.281)$$

Energía potencial,

$$V = mgy = mg(a \sin \omega t - l \cos \theta). \quad (1.282)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)] + mgl \cos \theta, \quad (1.283)$$

donde hemos omitido términos constantes ($a^2\omega^2$) y la derivada total $\frac{df}{dt} = mga \sin \omega t$, con $f = -\frac{mga}{\omega} \cos \omega t$.

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1.284)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m\omega l \dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) - mgl \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta} + m\omega l \sin(\theta - \omega t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2 \ddot{\theta} + m\omega l (\dot{\theta} - \omega) \cos(\theta - \omega t).\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange para θ , obtenemos

$$l^2 \ddot{\theta} + a\omega l \dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) - a\omega^2 l \cos(\theta - \omega t) - a\omega l \dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) + gl \sin \theta = 0, \quad (1.285)$$

lo cual queda como

$$\ddot{\theta} - \frac{a\omega^2}{l} \cos(\theta - \omega t) + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.286)$$

Note que si $\omega = 0$, la Ec. (1.286) corresponde a la ecuación de movimiento de un péndulo simple.

En este sistema, $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$, por lo que la energía total $E = T + V$ no se conserva; se requiere un suministro continuo de energía para mantener girando el soporte del péndulo con velocidad angular ω constante.

10. Péndulo de resorte.

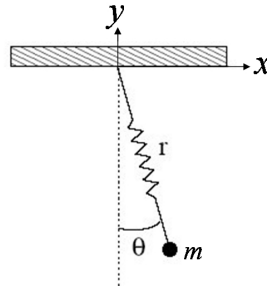


Figura 1.44: Péndulo de resorte.

El movimiento de la partícula ocurre en el plano vertical (x, y) . Definimos k como la constante del resorte, l es la longitud del resorte en reposo (en ausencia de la masa m), y r es la longitud del resorte con la masa m .

Las coordenadas generalizadas son $q_1 = r$ y $q_2 = \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \\ y &= -r \cos \theta, \\ \dot{x} &= r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta \\ \dot{y} &= r\dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \cos \theta.\end{aligned} \quad (1.287)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.61

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (1.288)$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}k(r - l)^2 - mgr \cos \theta. \quad (1.289)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - l)^2 + mgr \cos \theta. \quad (1.290)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.291)$$

la cual se puede escribir como

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \quad (1.292)$$

La ecuación de Lagrange para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (1.293)$$

que da como resultado,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g \cos \theta = 0. \quad (1.294)$$

Este sistema exhibe comportamiento caótico para ciertos valores de sus parámetros.

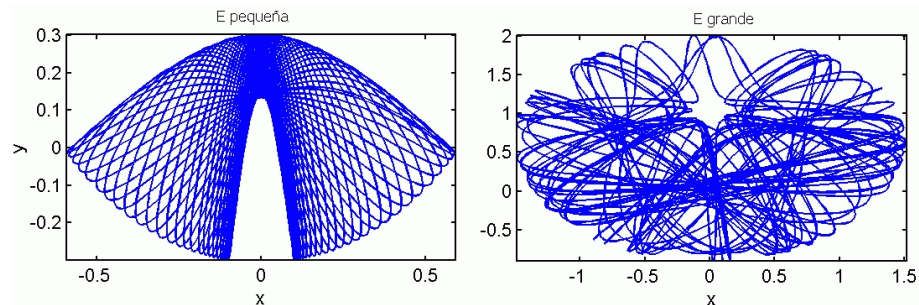


Figura 1.45: Coordenadas cartesianas y y x del péndulo de resorte para diferentes valores de su energía $E = T + V$. Izquierda: comportamiento regular. Derecha: caos.

11. El soporte de un péndulo plano de masa m y longitud l rota sin fricción con velocidad angular uniforme ω alrededor del eje vertical z .
- Encontrar la ecuación de movimiento del péndulo.
 - Encontrar el ángulo de equilibrio del péndulo.

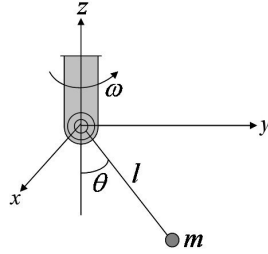


Figura 1.46: Péndulo con soporte giratorio.

La coordenada generalizada es $q = \theta$.

a) Para encontrar la ecuación de movimiento, expresamos

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \cos \omega t, \\ y &= l \sin \theta \sin \omega t, \\ z &= -l \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.295)$$

y las velocidades

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - l \omega \sin \theta \sin \omega t \\ \dot{y} &= l \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + l \omega \sin \theta \cos \omega t \\ \dot{z} &= l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.296)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta). \quad (1.297)$$

La energía potencial correspondiente es

$$V = mgz = -mgl \cos \theta. \quad (1.298)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta. \quad (1.299)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.300)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.63

la cual resulta en

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.301)$$

b) En los *puntos de equilibrio*, las fuerzas netas se anulan y las coordenadas generalizadas q_j satisfacen la condición $\ddot{q}_j = 0$ (aceleración se hace cero).

El ángulo de equilibrio θ_o del péndulo está dado por la condición $\ddot{\theta} = 0$ en la ecuación de movimiento,

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \omega^2 \sin \theta_o \cos \theta_o = \frac{g}{l} \sin \theta_o \quad (1.302)$$

Hay dos posibles soluciones,

$$\sin \theta_o = 0 \Rightarrow \theta_o = 0, \quad (1.303)$$

$$\omega^2 \cos \theta_o = \frac{g}{l} \Rightarrow \theta_o = \cos^{-1} \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right). \quad (1.304)$$

12. Regulador volante.

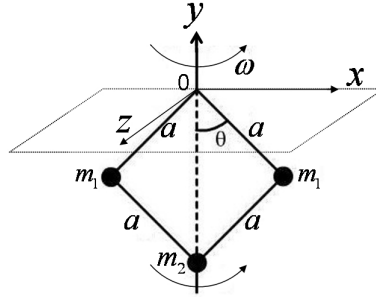


Figura 1.47: Regulador volante.

El punto O en extremo superior está fijo. La longitud a de la varilla es constante. La masa m_2 se mueve sin fricción sobre el eje vertical y que pasa por el punto O , mientras que las masas dos masas m_1 giran con velocidad angular constante ω alrededor del eje y .

Las coordenadas para m_2 son

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ y_2 &= -2a \cos \theta \\ z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.305)$$

Las coordenadas para una de las masas m_1 son

$$\begin{aligned} y_1 &= -a \cos \theta, \\ x_1 &= a \sin \theta \sin \omega t, \\ z_1 &= a \sin \theta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.306)$$

Coordenadas para la otra masa m_1 ,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ x_1' &= -x_1, \\ z_1' &= -z_1. \end{aligned} \quad (1.307)$$

Hay un solo grado de libertad. Se puede tomar la coordenada generalizada $q = \theta$.

Tenemos,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}2m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \\ &= m_1(a^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 a^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \\ V &= 2m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -2m_1 g a \cos \theta - 2m_2 g a \cos \theta. \\ L &= T - V = m_1(a^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 a^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2) g a \cos \theta. \end{aligned}$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.308)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2m_1 a^2 \dot{\theta} + 4m_2 a^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 2m_1 a^2 \ddot{\theta} + 4m_2 a^2 (\ddot{\theta} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta), \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 2m_1 \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta + 4m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - 2(m_1 + m_2) g a \sin \theta, \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta} a^2 (m_1 + 2m_2 \sin^2 \theta) + 4m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \\ - 2m_1 \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta + 2(m_1 + m_2) g a \sin \theta = 0, \end{aligned} \quad (1.309)$$

Note que si $\omega = 0$ y $m_2 = 0$, la ecuación se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0, \quad (1.310)$$

que es la ecuación del péndulo simple.

13. Encuentre la ecuación de movimiento de una partícula de masa m que se mueve en una dimensión x , cuyo Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) e^{\gamma t}, \quad (1.311)$$

donde las constantes γ y ω son cantidades reales y positivas.

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.65

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.312)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m e^{\gamma t} \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m \omega^2 x e^{\gamma t}, \quad (1.313)$$

lo que conduce a

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \gamma \dot{x} = 0, \quad (1.314)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado. La fuerza restauradora es $-m\omega^2 x$ y la fuerza de fricción proporcional a la velocidad es $-\gamma m \dot{x}$. Note que

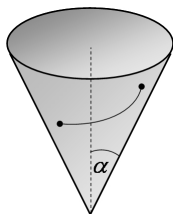
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 e^{\gamma t}, \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 e^{\gamma t}. \quad (1.315)$$

La energía mecánica total no se conserva en este sistema, puesto que $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$.

1.7. Problemas

1. El principio de Fermat establece que la propagación de la luz entre dos puntos dados sigue la trayectoria de mínimo tiempo.
 - a) Determine la trayectoria de un rayo de luz dentro de un disco cristalino de radio a , grosor despreciable, y cuyo índice de refracción n varía radialmente como
 - a) $n(r) = a/r$.
 - b) $n(r) = a/r^2$.
 - c) Encuentre $n(r)$ tal que un rayo de luz dentro de este disco describa una trayectoria circular.

2. Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de un cono invertido, con ángulo de vértice α . Use coordenadas cilíndricas.



3. Determine la curva $y(x)$ para la cual alcanza su valor extremo la integral $I = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx$, tal que $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$.
4. Calcule el valor mínimo de la integral

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx,$$

donde la función $y(x)$ satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

5. En los páramos andinos se encuentra el pueblo A y, a una distancia de 2π Km al este de A , está el pueblo B . El terreno entre estos dos pueblos es muy irregular y no hay carreteras asfaltadas. Sin embargo, la experiencia ha indicado que la velocidad de un ciclista en bicicleta montañera en esa zona se puede expresar aproximadamente como $v = 10(\text{Km/h}) e^{y/3}$, donde y es la distancia en Km medida perpendicularmente a la línea recta que une A y B . ¿Cuál es el mínimo tiempo que tardaría un ciclista entre los pueblos A y B ?
6. La forma adoptada por una cuerda uniforme de densidad ρ que cuelga suspendida entre dos puntos en un campo gravitacional corresponde al mínimo de su energía potencial. Determine esa forma.

7. Encuentre la geodésica (i.e. la trayectoria de menor distancia) entre los puntos $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Use coordenadas cilíndricas.
8. Un cuerpo se deja caer desde una altura h y alcanza el suelo en un tiempo T . La ecuación de movimiento concebiblemente podría tener cualquiera de las formas

$$y = h - g_1 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g_2 t^2, \quad y = h - \frac{1}{4} g_3 t^3;$$

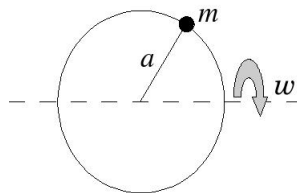
donde g_1, g_2, g_3 son constantes apropiadas. Demuestre que la forma correcta es aquella que produce el mínimo valor de la acción.

9. El Lagrangiano de una partícula de masa m es

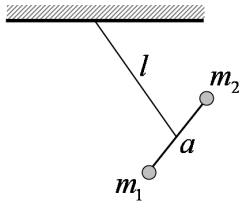
$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x),$$

donde $f(x)$ es una función diferenciable de x . Encuentre la ecuación de movimiento.

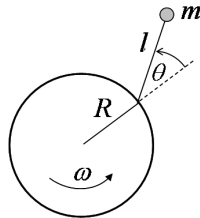
10. Encuentre la ecuación de movimiento de un *péndulo paramétrico*, el cual consiste en un péndulo de masa m cuya longitud se hace variar de la forma $l = l_0(1 + b \sin \omega t)$.
11. Una varilla de peso despreciable está suspendida de un extremo, de modo que puede oscilar en un plano vertical. Una partícula de masa m se desliza sin fricción a lo largo de la varilla.
- Encuentre la energía de la partícula.
 - Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula.
12. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre un aro de radio R , el cual gira con velocidad angular uniforme ω alrededor de su diámetro vertical.
- Derive la ecuación de movimiento de la partícula.
 - Encuentre la posición de equilibrio de la partícula.
13. Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre un aro de radio a , el cual rota con velocidad angular constante ω alrededor de su diámetro horizontal. ¿Cuál es la ecuación de movimiento de la partícula?



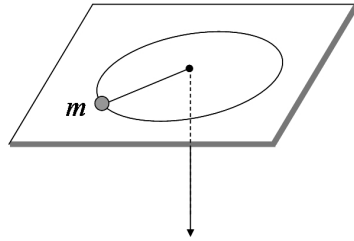
14. Obtenga las ecuaciones de movimiento de un péndulo esférico, es decir, una partícula de masa m suspendida de una varilla rígida, sin peso y sin fricción, cuya longitud es l
15. Un péndulo compuesto está formado por una varilla de masa despreciable y longitud l , con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longitud a , ($a < l$), en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2 . Las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.



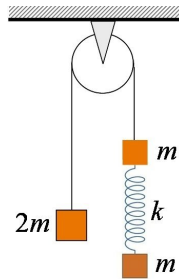
16. Un aro de radio R y masa despreciable cuelga de un punto de su borde de modo que puede oscilar en su plano vertical. Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre el aro. Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
17. Un sistema consiste en una partícula de masa m que se mueve verticalmente colgada de un resorte de constante k y de la cual cuelga a su vez un péndulo de longitud l y masa m . Desprecie la masa de la varilla del péndulo y considere que éste se mueve en un plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.
18. Encuentre la ecuación de movimiento para el parámetro angular θ en el problema de la braquistocrona.
19. Una manera de simular gravedad en una nave espacial es mediante rotación. Considere un péndulo de longitud l y masa m dentro de una nave, y cuyo soporte gira en un círculo de radio R con velocidad angular constante ω en el mismo plano del péndulo. Calcule ω tal que el ángulo θ con respecto a la dirección radial describa el mismo movimiento que tendría este péndulo colgado verticalmente de un punto fijo en el campo gravitacional terrestre.



20. Una masa m unida a una cuerda se mueve sin fricción sobre una mesa tal que el otro extremo de la cuerda pasa a través de un agujero en la mesa y está halado por alguien. Inicialmente, la masa se mueve en un círculo, con energía E . La cuerda es halada a continuación, hasta que el radio del círculo se reduce a la mitad. ¿Cuánto trabajo se hizo sobre la masa?

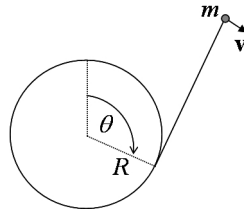


21. Una cuerda de masa despreciable pasa a través una polea fija y soporta una masa $2m$ en un extremo. En el otro extremo de la cuerda se encuentra una masa m y, colgando de ésta por medio de un resorte de constante k , hay otra masa m .
- Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - Encuentre la posición de la masa que cuelga del resorte en función del tiempo.

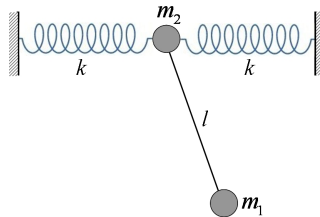


22. Una partícula de masa m y carga q_1 se mueve sin fricción sobre la superficie de una esfera de radio R en el campo gravitacional terrestre. Otra carga q_2 se encuentra fija en el punto más bajo de la esfera.
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de la primera carga.
 - Encuentre la posición de equilibrio de la primera carga.
23. Dos masas, m_1 y m_2 , están conectadas por una cuerda de longitud l a través de un agujero en el vértice de un cono vertical con ángulo de vértice α , de manera que m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente. Desprecie la fricción.
- Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - Calcule el radio de equilibrio de m_1 .

24. Una partícula de masa m y carga q se desliza sin fricción sobre una varilla de masa despreciable que puede girar en un plano vertical alrededor de un extremo fijo. En el extremo fijo de la varilla hay una carga puntual fija $-q$, la cual está conectada a la partícula móvil mediante un resorte de constante k .
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
 - Calcule la energía del sistema.
25. Una partícula de masa m está atada a una cuerda de masa despreciable fija a un cilindro de radio R . La partícula se puede mover sobre un plano horizontal sin fricción. Inicialmente, la cuerda se encuentra totalmente enrollada alrededor del cilindro, de modo que la partícula toca al cilindro. Se le da un impulso radial a la partícula, tal que ésta adquiere una velocidad inicial v_0 y la cuerda comienza a desenrollarse.
- Encuentre la ecuación de movimiento en términos de una coordenada generalizada apropiada.
 - Encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales.
 - Calcule el momento angular de la partícula con respecto al eje del cilindro, usando el resultado de (b).



26. Una partícula de masa m_1 cuelga de una varilla de masa despreciable y longitud l , cuyo punto de soporte consiste en otra partícula de masa m_2 que se mueve horizontalmente sujeta a dos resortes de constante k cada uno. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.



27. Un aro uniforme de radio a y masa m rueda sin deslizar dentro de un cilindro fijo de radio R , ($R > a$). Encuentre el período para pequeñas oscilaciones del aro.

28. Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un cable recto muy largo, el cual está conectado en un punto P perpendicularmente a una varilla de longitud l , formando un plano vertical en el campo gravitacional terrestre. La varilla gira con respecto a su otro extremo fijo O en el plano vertical, con velocidad angular constante ω . Las masas de la varilla y del cable son despreciables.
- ¿Se conserva la energía mecánica de la partícula?
 - Encuentre y resuelva la ecuación de movimiento de la partícula.

