Auxiliar 4

24/03

Coordenadas Cilíndricas/

- $\vec{r}(t) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$
- $\vec{v}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$
- $\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$

Coordenadas Esféricas/

- $\vec{r}(t) = r\hat{r}$
- $\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
- $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2)\hat{\theta}$
$$+ (2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta) + r\sin(\theta)\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

* En la aceleración, la componente en $\hat{\phi}$ es $\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi})$

* Una fuerza $\vec{f}$ es conservativa ssi $\exists U$ tq $\vec{f} = -\nabla U$ v $\vec{\nabla}\times\vec{f} = 0$
El trabajo que ejercen estas fuerzas no depende del camino recorrido.

* El Trabajo está dado por $W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

* La Energía Mecánica se define como $E = K + U$, siendo K la energía cinética y U el potencial

* El trabajo total será $W_{TOT} = K_f - K_i$ (Sale de la definición)

* La energía mecánica y el trabajo se relacionan mediante la expresión:

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{NC}$$

Donde W_{NC} corresponde al trabajo ejercido por fuerzas NO conservativas

P1// Tenemos $\vec{F}_1 = -\alpha(xz^2\hat{\imath} + zx^2\hat{k})$ y buscamos U tq $\nabla U = -\vec{F}$.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \underbrace{\alpha x z^2\hat{\imath} + \alpha z x^2\hat{k}}_{-\vec{F}}$$

Igualamos por componentes:

$\hat{\imath}\rfloor\ \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x z^2 \Rightarrow \int dU = \alpha z^2 \int x\,dx \rightarrow U = \alpha z^2 \cdot \frac{x^2}{2} + C(y,z)$

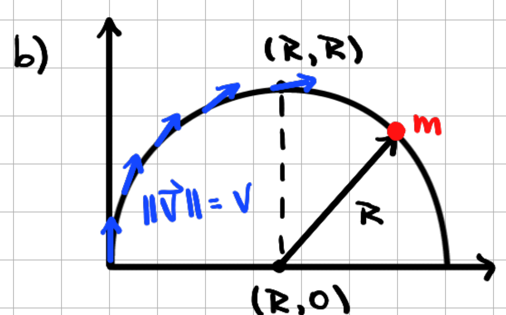
$\hat{\jmath}\rfloor\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \rightarrow U = C(x,z)$

$\hat{k}\rfloor\ \frac{\partial U}{\partial z} = \alpha x^2 z \Rightarrow \int dU = \alpha x^2 \int z\,dz \rightarrow U = \alpha x^2 \cdot \frac{z^2}{2} + C(x,y)$

De aquí determinamos que $C(y,z) = C(x,z) = C(x,y) = C \overset{\text{Imponemos}}{=} 0$. Así se tiene el potencial

$$\boxed{U = \frac{\alpha}{2}x^2z^2 \rightarrow \vec{F}_1 \text{ conservativa}}$$

b)



El Trabajo total será el producido por todas las fuerzas:

$$W_{TOT} = \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \underbrace{\cancel{\int_C \vec{N} \cdot d\vec{r}}}_{\text{Siempre } 0} + \int_C m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

Como $\|\vec{v}\| = v$ constante, $W_{TOT} = K_f - K_i = 0$

$$\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_C m\vec{g} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$$

C es el camino a recorrer, pero ¿Cuál camino escoger? Si nos fijamos, tanto $m\vec{g}$ como $\vec{F}_1$ son conservativas, por lo que da igual el camino, así que escogemos uno a conveniencia.

Recorremos el eje x de 0 a R, y luego el eje z de 0 a R, por lo que el camino se separa en 2.

- $\int_C m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_0^R -mg\hat{k} \cdot dx\hat{\imath} + \int_0^R -mg\hat{k} \cdot dz\hat{k} = -mg(R-0) = -mgR$

$$\cdot \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_0^R \underbrace{-\alpha(x\cancel{z^2}\,\hat{\imath} + \cancel{z}x^2\,\hat{k})\cdot dx\,\hat{\imath}}_{\text{En esta parte del camino } z=0} + \int_0^R \underbrace{-\alpha(xz^2\,\hat{\imath} + zx^2\,\hat{k})\cdot dz\,\hat{k}}_{\text{En esta parte del camino } x=R}$$

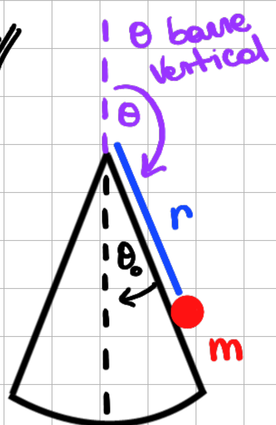
$$= \int_0^R -\alpha z R^2 dz = -\alpha R^2 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^R = -\frac{\alpha}{2}R^4$$

* Propuesto calcular mediante C : recta que une (0,0) y (R,R)

Ya teniendo los trabajos del peso y de $\vec{F}_1$, tenemos el de $\vec{F}_2$:

$$\boxed{\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -(-mgR) - \left(-\frac{\alpha}{2}R^4\right) = mgR + \frac{\alpha}{2}R^4}$$

P2//



Para este problema utilizamos coordenadas esféricas. Por construcción, tendremos:

$$\theta + \theta_0 = \pi \rightarrow \theta = \pi - \theta_0 \rightarrow \sin(\theta) = \sin(\theta_0)$$

Como θ es constante, $\hat{\phi}$ se convierte en el mismo $\hat{\phi}$ de cilíndricas (Traten de visualizarlo). Como la única fuerza esta en $\hat{\rho}$, la fuerza en $\hat{\phi}$ será 0, y así:

$$m a_\phi = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{m}{r\sin(\theta)}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\right)}_{\text{aceleración componente } \phi \text{ de esféricas}} = 0$$

Como la derivada es 0, el argumento es constante.

$$r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} = c$$

Es cte $\forall t$. En particular, lo será para $t=0$, así que evaluando:

$$r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} = r_0^2\sin^2(\theta_0)\,w_0$$

$$\boxed{\therefore\ \dot{\phi} = \frac{r_0^2 w_0}{r^2}}$$

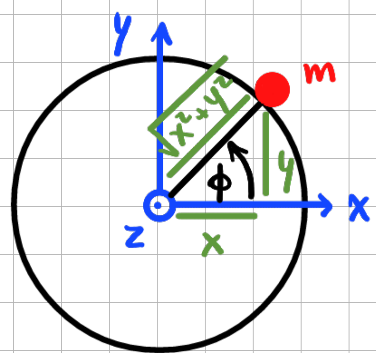
b) f será conservativa si $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$ y $-\nabla U = \vec{f}$. Como nos interesa encontrar la energía mecánica en la parte c, veremos el potencial.

Expresemos f en coordenadas cartesianas:

$$x = \rho\cos(\phi) \quad , \quad y = \rho\sin(\phi) \, , \quad \hat{\rho} = \cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\phi)\hat{\jmath}$$

$$\vec{f} = -\frac{B}{\rho^2}\hat{\rho} = -\frac{B}{(x^2+y^2)}(\cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\phi)\hat{\jmath})$$

Nos gustaría deshacernos del ángulo ϕ. Veamos el cono desde arriba.



$$\sin(\phi) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \quad \wedge \quad \cos(\phi) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

De esta forma f será:

$$\vec{f} = \frac{B}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{\imath} + y\hat{y})$$

El gradiente en cartesianos está dado por:

Queremos esto

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\vec{f}$$

Como $\vec{f}$ no tiene componente en $\hat{k}$, $\partial U/\partial z = 0$. Igualamos componentes

- $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-Bx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \int dU = -B\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \rightarrow U = \frac{-B}{\sqrt{x^2+y^2}} + C(y)$

- $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-By}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \int dU = -B\int \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \rightarrow U = \frac{-B}{\sqrt{x^2+y^2}} + C(x)$

Así determinamos $C(x) = C(y) = C \in \mathbb{R}$. A dicha constante determinaremos 0, puesto que a efectos prácticos, sólo interesan diferencias de Potencial

$$\boxed{U = \frac{-B}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \vec{f} = -\nabla U \text{ conservativo}}$$

ρ

El problema se puede hacer directamente en coordenadas cilíndricas, donde el gradiente está dado por:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

Como $f = -B \cdot \frac{1}{\rho^2}\hat{\rho}$, y no hay dependencia de otras variables, se tendrá:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{B}{\rho^2} \Rightarrow \int dU = B\int \frac{d\rho}{\rho^2} \Rightarrow U = -\frac{B}{\rho}$$

Lo mismo que habíamos llegado.

c) Sabemos $E = K + U$, es decir:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-B}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\Leftrightarrow \rho}}\right)$$

Conocemos U. Calculemos K

$$v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\dot{r}\hat{r} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cancelto{0}{\dot{\theta}}\hat{\theta}\| = \dot{r}^2 + \frac{r_0^4 w_0^2}{r^2}\sin^2(\theta)$$

Sabemos $\dot{\phi}$. Así:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{r_0^4 w_0^2}{r^2}\sin^2(\theta)$$

Y la energía será:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{r_0^4 w_0^2}{r^2}\sin^2(\theta)\right) - \frac{B}{\rho}}$$