FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Auxiliar 5: Coordenadas Intrínsecas y Cinemática 3D

29 de marzo de 2022

1. Considere un proyectil lanzado cerca de la superficie de la Tierra con rapidez inicial v_0 e inclinación inicial θ_0. Despreciando toda fuente de roce, calcule el radio de curvatura ρ_c de la trayectoria parabólica en el punto inicial $y = 0$ y cuando se alcanza la altura máxima h. Recuerde que $\rho_c = v^3/||\vec{v} \times \vec{a}||$

2. La trayectoria de un punto P, usando coordenadas cilíndricas, se define con $\rho(t) = \rho_0$, $\phi(t) =?$ y $z(t) = h - B\phi(t)$. Se sabe que $\phi(t)$ es una función monótona, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, con h, B, $\omega_0 > 0$.

   a) Obtenga las expresiones para el vector velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.
   b) Obtenga una expresión para el vector tangente $\hat{t}$ y para la rapidez v.
   c) Obtenga expresiones para la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ y la tangencial $\vec{a}_t$.
   d) Si se sabe que la aceleración apunta todo el tiempo perpendicular al eje Z, encuentre $\phi(t)$.
   e) Utilizando $\phi(t)$, calcule el radio de curvatura y determine explícitamente la aceleración centrípeta.

3. Considere una curva espiral cónica como la de la figura, descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones: $\theta = \pi/4$ y $\phi = 2\pi r/R$, donde R es una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen y manteniendo una velocidad radial constante y conocida, $\dot{r} = c$.

   a) Determine la distancia radial al punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$.
   b) Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto P.
   c) Considerando que da 4 vueltas, estime la longitud total de la espiral y determine el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. Le serán útiles los siguientes resultados:

$$\int \sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1} u) + C$$

$$\frac{1}{2}(4\pi\sqrt{2+64\pi^2} + \sinh^{-1}(4\sqrt{2}\pi)) \approx 160$$