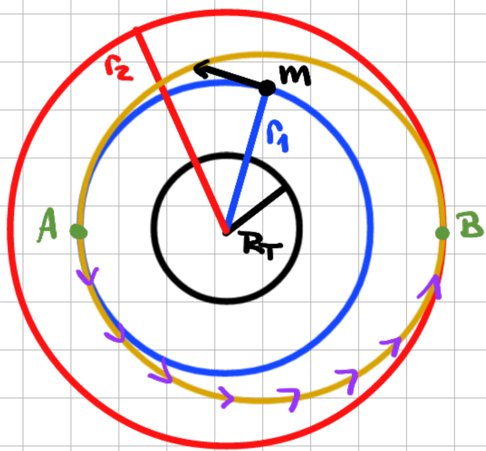
Auxiliar 8

P1//



La aceleración en polares es:

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (\cancel{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}^{\,0})\,\hat{\theta}$$

Luego por 2da Ley de Newton:

$$-mr\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

La energía será $E = K + U$, y así la diferencia será:

$$\Delta E = E_f - E_i = K_f + U_f - K_i - U_i$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{4R_T} - \frac{1}{2}m\frac{GM}{2R_T} + \frac{GMm}{4R_T} - \frac{GMm}{2R_T}$$

$$\therefore \Delta E = G\frac{Mm}{8R_T} \;//$$

b) Consideremos el vehículo ya está en la órbita elíptica. Como se conserva el momento angular, $L_A = L_B$

$$m \cdot 2R_T \cdot V_A = m \cdot 4R_T \cdot V_B \Rightarrow V_A = 2V_B$$

Como sólo se está en presencia de una fuerza conservativa, la energía se conserva:

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\overset{4V_B^2}{V_A^2} - \frac{GM\cancel{m}}{2R_T} = \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 - \frac{GM\cancel{m}}{4R_T}$$

$$2V_B^2 - \frac{1}{2}V_B^2 = \frac{GM}{2R_T} - \frac{GM}{4R_T}$$

$$\frac{3}{2}V_B^2 = \frac{GM}{4R_T}$$

$$V_B = \sqrt{\frac{GM}{6R_T}} \quad \wedge \quad V_A = \sqrt{\frac{2GM}{3R_T}}$$

Ahora vemos las diferencias de velocidad en cada punto. (Recordemos que ya se tiene una expresión para velocidad en órbita circular.

En A el cambio de velocidad será:

$$\Delta v_A = V_A - V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{3R_T}} - \sqrt{\frac{GM}{2R_T}}$$

Y en B:

$$\Delta v_B = V_f - V_B = \sqrt{\frac{GM}{4R_T}} - \sqrt{\frac{GM}{6R_T}}$$

P2) a) Se tiene el potencial $V(r) = -GMm/r$. Se calcula la fuerza resultante de la forma $\vec{F} = -\nabla V$

$$-\nabla V = -\frac{dV}{dr} = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Devido a que es sólo una variable

Se calcula el torque de la forma $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, siendo $\vec{r} = r\hat{r}$.

$$\vec{\tau} = r \cdot -\frac{GMm}{r^2}(\cancelto{0}{\hat{r} \times \hat{r}}) = 0$$

Como el torque es 0, el momento angular $\vec{L}$ será constante $\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}\right)$ lo cual reduce el movimiento se reduce a un plano. Usando esféricas ($\theta = \pi/2$ cte) se tendrá:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \rightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\phi}\hat{k}$$

Por segunda Ley de Newton:

Recordar fórmula fea

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Separando por componentes:

$\hat{r}]\ m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$ Por momento angular $L = mr^2\dot{\phi}$

$\hat{\phi}]\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$ $\rightarrow r\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{m^2r^3}$

Reemplazando en $\hat{r}$:

$$m\ddot{r} - m\frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{GMm}{r^2} \Rightarrow m\ddot{r} = \left(\frac{L^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}\right)$$

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r^2}\right) \qquad \therefore U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r^2}$$

b) Se pide $E(r,\dot{r})$. Esto sale muy rápido :)

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$* \ \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff} \, /\!\!/$$

c) Obtener $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = f(r)$. Por regla de la cadena, $\dot{r}(\phi) = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\cdot\underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\dot{\phi}}$. Se despeja $\dot{r}^2$ de la energía:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{eff}) = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\dot{\phi}^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{m^2r^4}{L^2}\cdot\frac{2}{m}(E - U_{eff})$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \underbrace{\frac{2mr^4}{L^4}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}_{f(r)}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = f(r)$$

d) Se viene matraca fea.

$$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{f(r)} \xrightarrow[\text{dfi truco}]{\text{ilegal}} d\phi = \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \rightarrow \phi(t) - \phi_0 = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$$

Vemos la integral de r por separado.

$$\int_0^t \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\int_0^t \frac{\frac{1}{r^2}dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}}} \quad (u = 1/r) \quad = \frac{-1}{\sqrt{2m}}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{E - \frac{u^2L^2}{2m} - uGMm}}$$

Nikita Nipone $\pm \frac{m^3M^2G^2}{2L^2}$ para completar binomio²

$$= \frac{-1}{\sqrt{2m}}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{E + \frac{m^3M^2G^2}{2L^2} - \left(\frac{uL}{\sqrt{2m}} - \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{L}\right)^2}} \qquad (v = u/2m)$$

$$= -\int_0^t \frac{du}{\sqrt{E + \frac{m^3 M^2 G^2}{2L^2} - \left(v - \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{L}\right)^2}}$$

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = \arccos\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a = \sqrt{E + \frac{m^3 M^2 G^2}{2L^2}} \wedge b = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{L}$$

$$\phi(t) - \phi_0 = \arccos\left(\frac{1/r - b}{a}\right)$$

$$\frac{1/r - b}{a} = \cos(\phi(t) - \phi_0)$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{1}{a\cos(\theta(t) + \theta_0) + b}$$