FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 9

Conceptos útiles:

- Ecuación de Binet:
  - Ecuación de movimiento para una fuerza central:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad ; \quad l = mr^2\dot{\theta} = cte$$

  - Cambio de variable:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{m}u^2$$

$$u'(\theta) = \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{l} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{l}{m}u'$$

$$u''(\theta) = \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{m}{l}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{m\ddot{r}}{l\dot{\theta}} = -\frac{m^2\ddot{r}}{l^2u^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{l^2u^2}{m^2}u''$$

  - Introduciendo el cambio de variable en la ecuación de movimiento radial:

$$u^2u'' + u^3 = -\frac{m}{l^2}F(u)$$

  - Caso Kepleriano (Ley de Gravitación Universal):

$$u^2u'' + u^3 = \frac{GMm^2}{l^2}u^2 \Rightarrow u'' + u = \frac{GMm^2}{l^2} \Rightarrow u(\theta) = \frac{GMm^2}{l^2} + C_1\cos(\theta + c_2)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{GMm^2}{l^2} + C_1\cos(\theta + c_2)} = \frac{\frac{l^2}{GMm^2}}{\frac{GMm^2}{l^2}\frac{l^2}{GMm^2} + C_1\frac{l^2}{GMm^2}\cos(\theta + c_2)} = \frac{\frac{l^2}{GMm^2}}{1 + C_1\frac{l^2}{GMm^2}\cos(\theta + c_2)}$$

$$r(\theta) = \frac{R}{1 + \epsilon\cos(\theta + c_2)} \Rightarrow R = \frac{l^2}{GMm^2} \quad , \quad \epsilon = C_1\frac{l^2}{GMm^2} = C_1R$$

  Donde R es el factor de escala de las secciones cónicas y ϵ la excentricidad orbital. Asumiendo que la masa m parte del periastro (punto mas cercano a M), y aplicando conservación de la energía:

$$r(\theta = 0) = R_{min} = \frac{R}{1 + \epsilon} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow r(\theta) = \frac{R}{1 + \epsilon\cos(\theta)} \quad , \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}}$$

  - Casos (tipos de movimiento orbital):
    - Hipérbola: $\epsilon > 1$, $E > 0$
    - Parábola $\epsilon = 1$, $E = 0$
    - Elipse (órbita acotada): $0 < \epsilon < 1$, $E < 0$
      - Circunferencia (caso especial): $\epsilon = 0$, $E = E_{min} = -\frac{G^2M^2m^3}{2l^2}$

Problemas:

1. La masa m está sometida a la siguiente fuerza central, con $A > 0$ y B puede ser positiva o negativa:

$$F(r) = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3}$$

Como la fuerza es central, se conserva la energía mecánica $E = K+U$ y el momentum angular $l = mr^2\dot{\theta}$ Utilizaremos la ecuación de Binet para resolver y estudiar los distintos tipos de órbitas que se puedan dar para la masa m, dependiendo de las relaciones entre los parámetros que definen el movimiento.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta})^2) = F(r) \Rightarrow u^2u'' + u^3 = -\frac{m}{l^2}F(u) = \frac{mA}{l^2}u^2 - \frac{mB}{l^2}u^3$$

$$\boxed{u''(\theta) = \frac{mA}{l^2} - \left(1 + \frac{mB}{l^2}\right)u}$$

a) La ecuación de Binet tendrá distintas soluciones, dependiendo del signo de $1 + mB/l^2$

- Caso 1: $1 + mB/l^2 < 0 \Rightarrow l^2 < -Bm \Rightarrow B < 0$

$$u''(\theta) = \frac{mA}{l^2} + \kappa u \quad ; \quad \kappa = -\left(1 + \frac{mB}{l^2}\right) > 0$$

$$u = v - \frac{mA}{\kappa l^2} \Rightarrow v'(\theta) = u' \quad , \quad v''(\theta) = u''$$

$$v''(\theta) = \kappa v \Rightarrow v(\theta) = C_1\cosh(\sqrt{\kappa}\theta + c_2) \Rightarrow u(\theta) = C_1\cosh(\sqrt{\kappa}\theta + c_2) - \frac{mA}{\kappa l^2}$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{C_1\cosh(\sqrt{\kappa}\theta + c_2) - \frac{mA}{\kappa l^2}}}$$

El movimiento es una espiral que converge exponencialmente (mas rápidamente) a $r = 0$.

- Caso 2: $1 + mB/l^2 = 0 \Rightarrow l^2 = -Bm \Rightarrow B < 0$

$$u''(\theta) = \frac{mA}{l^2} \Rightarrow u(\theta) = C_1 + C_2\theta + \frac{1}{2}\frac{mA}{l^2}\theta^2$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{C_1 + C_2\theta + \frac{1}{2}\frac{mA}{l^2}\theta^2}}$$

El movimiento es una espiral que converge polinómicamente (mas lentamente) a $r = 0$.

- *b*) Caso 3: $1 + mB/l^2 > 0 \Rightarrow l^2 > -Bm \Rightarrow B < 0 \vee B > 0$

$$u''(\theta) = \frac{mA}{l^2} - ku \quad ; \quad k = 1 + \frac{mB}{l^2} > 0$$

$$u = v + \frac{mA}{kl^2} \Rightarrow v'(\theta) = u' \quad , \quad v''(\theta) = u''$$

$$v(\theta) = C_1\cos(\sqrt{k}\theta + c_2) \Rightarrow u(\theta) = \frac{mA}{kl^2} + C_1\cos(\sqrt{k}\theta + c_2)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{mA}{kl^2} + C_1\cos(\sqrt{k}\theta + c_2)}$$

Reorganizamos los términos para que la solución se asemeje a la del enunciado:

$$r(\theta) = \frac{\frac{kl^2}{mA}}{1 + \frac{kl^2}{mA}C_1\cos(\sqrt{k}\theta + c_2)} = \frac{\frac{l^2+mB}{mA}}{1 + \frac{kl^2}{mA}C_1\cos(\sqrt{k}\theta + c_2)} = \frac{R}{1 + \epsilon\cos(\alpha\theta + c_2)}$$

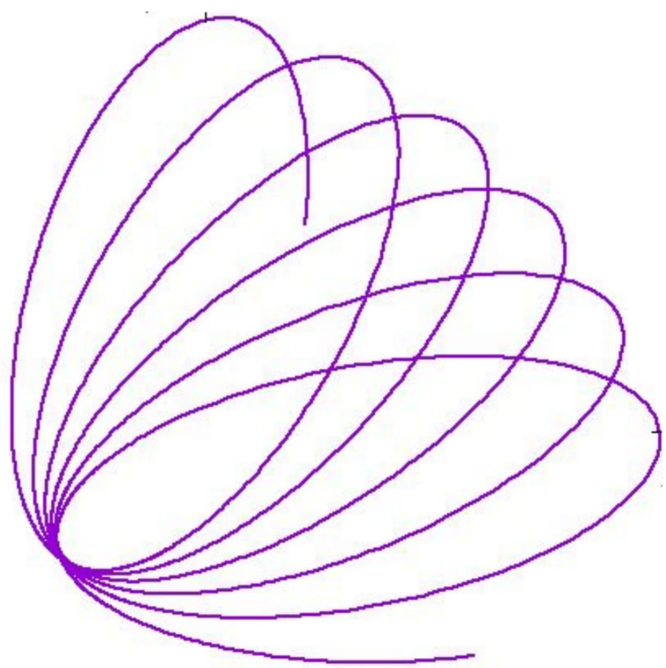
$$R = \frac{l^2 + mB}{mA} \quad , \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{mB}{l^2}} \quad , \quad \epsilon = \frac{kl^2}{mA}C_1$$

Aplicamos la condición inicial, es decir, que la masa m inicia su movimiento en el periastro:

$$r(\theta = 0) = R_{min} = \frac{R}{1 + \epsilon} = \frac{R}{1 + \epsilon\cos(c_2)} \Rightarrow c_2 = 0$$

Con esto, obtenemos la solución del enunciado: una elipse que precesa, ya que $\alpha \neq 1$:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{R}{1 + \epsilon\cos(\alpha\theta)}}$$



Para determinar si el movimiento de precesión se adelanta o atrasa con respecto al movimiento de traslación, debemos analizar el signo de B:

- Si B es positiva, la precesión se adelanta a la traslación:

$$B > 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{1 + \frac{mB}{l^2}} > 1$$

- Si B es negativa, la precesión se atrasa con respecto a la traslación:

$$B < 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{1 + \frac{mB}{l^2}} < 1$$

Por otro lado, la velocidad angular orbital es:

$$\boxed{\dot{\theta}(\theta) = \frac{l}{mr^2} = \frac{l}{mR^2}(1 + \epsilon \cos(\alpha\theta))^2}$$

La que está en términos de la excentricidad ϵ, la cual no tenemos explícitamente, ya que estaba en función de la constante de integración C_1. Para determinarla, usamos conservación de la energía:

$$E = cte = K + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

La energía potencial asociada a la fuerza central la calculamos integrando la fuerza desde una referencia $r = \infty$ hasta la distancia radial r:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{A}{r^2}+\frac{B}{r^3}\right)dr = -\frac{A}{r}+\frac{B}{2r^2}$$

Realizando los cambios de variable de Binet, reescribimos la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2}{m^2}u'^2+\frac{1}{u^2}\frac{l^2}{m^2}u^4\right) - Au + \frac{B}{2}u^2 = \frac{l^2}{2m}(u'^2+u^2) - Au + \frac{B}{2}u^2$$

Reemplazando u y u' en la expresión para la energía:

$$E = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{(-\epsilon\alpha\text{sen}(\alpha\theta))}{R^2}^2 + \frac{(1+\epsilon\cos(\alpha\theta))}{R^2}^2\right) - A\frac{(1+\epsilon\cos(\alpha\theta))}{R} + \frac{B}{2}\frac{(1+\epsilon\cos(\alpha\theta))}{R^2}^2$$

Evaluamos en $\theta = 0$, ya que la energía es constante:

$$E = \frac{l^2}{2m}\frac{(1+\epsilon)}{R^2}^2 - A\frac{1+\epsilon}{R} + \frac{B}{2}\frac{(1+\epsilon)}{R^2}^2$$

$$\frac{2mR^2E}{l^2} = (1+\epsilon)^2 - \frac{2mAR}{l^2}(1+\epsilon) + \frac{mB}{l^2}(1+\epsilon)^2$$

$$\frac{2mR^2E}{l^2} = 1+2\epsilon+\epsilon^2 - \frac{2mAR}{l^2} - \frac{2mAR}{l^2}\epsilon + \frac{mB}{l^2}(1+2\epsilon+\epsilon^2)$$

$$\frac{2mR^2E}{l^2} = 1 - \frac{2mAR}{l^2} + \frac{mB}{l^2} + 2\left(1+\frac{mB}{l^2}-\frac{mAR}{l^2}\right)\epsilon + \left(1+\frac{mB}{l^2}\right)\epsilon^2$$

Reemplazando el valor del factor de escala R y reordenando los términos:

$$\left(1+\frac{mB}{l^2}\right)\epsilon^2+2\left(1+\frac{mB}{l^2}-\frac{mA}{l^2}\frac{1}{A}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)\right)\epsilon+1+\frac{mB}{l^2}-\frac{2mA}{l^2}\frac{1}{A}\left(B+\frac{l^2}{m}\right) = \frac{2mE}{l^2}\frac{1}{A^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)^2$$

$$\left(1+\frac{mB}{l^2}\right)\epsilon^2 = \frac{2mE}{l^2A^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)^2 - 1 - \frac{mB}{l^2} + \frac{2m}{l^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)$$

$$\frac{l^2}{m}\left(1+\frac{mB}{l^2}\right)\epsilon^2 = \left(B+\frac{l^2}{m}\right)\epsilon^2 = \frac{2E}{A^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)^2 - \left(B+\frac{l^2}{m}\right) + 2\left(B+\frac{l^2}{m}\right)$$

$$\epsilon^2 = \frac{2E}{A^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)+1 \Rightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{1+\frac{2E}{A^2}\left(B+\frac{l^2}{m}\right)}}$$

Como $B+l^2/m > 0$, $E < 0$, con lo que $0 < \epsilon < 1$, con lo que el movimiento es efectivamente en una elipse. Así se tienen todas las magnitudes pedidas con sus constantes explícitamente calculadas. **Obs:** Notamos que si $B = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ y se recupera el caso Kepleriano (elipse estacionaria).