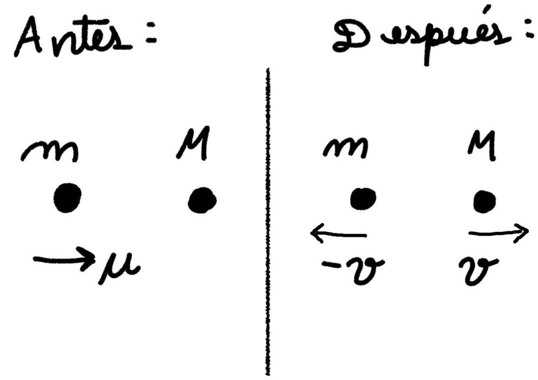
FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 16

1. *a*) Graficamos la situación antes y después del choque:



Aplicando conservación del momentum lineal, ya que hay ausencia de fuerzas externas, $F_{ext} = 0$:

$$p_i = p_f \Rightarrow mu + M0 = -mv + Mv$$
$$mu = (M-m)v \Rightarrow v = \frac{m}{M-m}u \quad (1)$$

Aplicando conservación de la energía cinética, ya que el choque es elástico:

$$K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}M0^2 = \frac{1}{2}m(-v)^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$mu^2 = (M+m)v^2 = (M+m)\frac{m^2}{(M-m)^2}u^2$$
$$m = \frac{(M+m)m^2}{(M-m)^2} \Rightarrow (M-m)^2 = m(M+m)$$
$$M^2 - 2mM + m^2 = mM + m^2 \Rightarrow M^2 = 3mM \Rightarrow M = 3m$$

Con lo que la razón $\boxed{M/m = 3}$. Reemplazando esto en la ecuación (1):

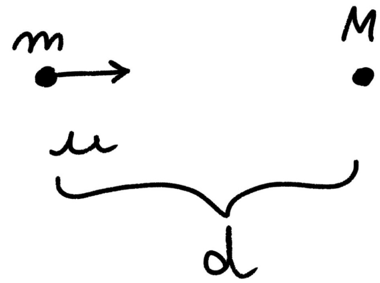
$$v = \frac{m}{3m-m}u = \frac{mu}{2m} = \frac{u}{2}$$

Que es el valor de la rapidez de las masas M y m después del choque.

b) Sean x_1 y x_2 las posiciones de las masas m y M respectivamente. Se tiene que:

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

Notamos que como $M + m = cte$ y $F_{ext} = 0$, $p_{cm} = (M+m)v_{cm} = cte$ y con esto $v_{cm} = cte$, por lo que podemos calcular la velocidad del centro de masas antes del choque. Consideraremos una distancia d entre las masas m y M en un instante t, como se aprecia en la figura de abajo:



La posición del centro de masa queda:

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + Md}{M + m}$$

Como la masa m sigue un MRU, $x_1(t) = x_0 + ut$. De este modo:

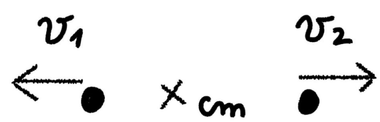
$$x_{cm} = \frac{m(x_0 + ut) + Md}{m + M}$$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad del centro de masa:

$$\dot{x}_{cm} = v_{cm} = \frac{mu + 0}{m + 3m} = \frac{m}{4m}u \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{u}{4}\hat{i}}$$

Notamos que $\vec{p}_{cm} = 4m\frac{u}{4}\hat{i} = mu\hat{i}$, valor que se conserva debido a la conservación de las masas y la ausencia de fuerzas externas. Como estamos en 1D, podemos prescindir del vector unitario.

c) Las velocidades relativas al centro de masa de las masas m y M son:



$$v_1 = -v - v_{cm} = -\frac{u}{2} - \frac{u}{4} = -\frac{3u}{4}$$

$$v_2 = v - v_{cm} = \frac{u}{2} - \frac{u}{4} = \frac{u}{4}$$

Coon esto, la energía cinética total con respecto al centro de masa es:

$$K_{T,cm} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}m\frac{9u^2}{16} + \frac{1}{2}3m\frac{u^2}{16} = \frac{12}{32}mu^2$$

$$\boxed{K_{T,cm} = \frac{3}{8}mu^2}$$

d) La energía cinética de la masa m con respecto al laboratorio estático es:

$$K_m = \frac{1}{2}m(-v)^2 = \frac{1}{2}m\frac{u^2}{4} \Rightarrow \boxed{K_m = \frac{1}{8}mu^2}$$

Por otro lado, notamos que para la masa M:

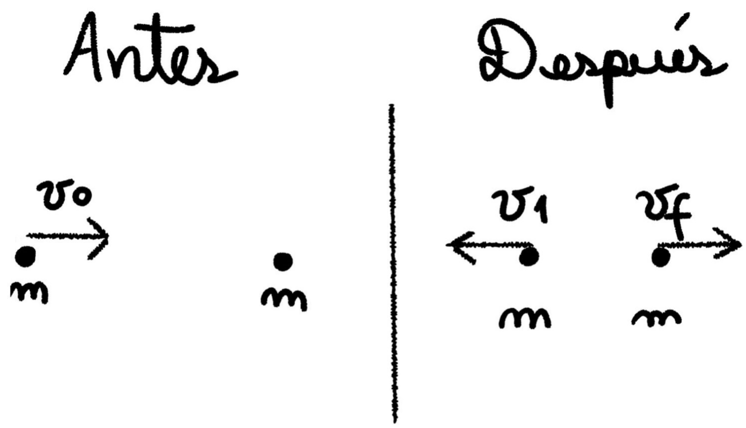
$$K_M = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3m\frac{u^2}{4} = \frac{3}{8}mu^2$$

Sumando ambas energías cinéticas:

$$K_T = K_m + K_M = \frac{1}{2}mu^2 = K_i$$

Que corresponde a la energía cinética inicial, ya que al ser un choque elástico, ésta se conserva.

2. *a)* 1) Primera colisión: ”trivial”, se transfiere todo el momentum, ya que las masas son iguales. De todas maneras, haremos un análisis de la situación. Gráficamos antes y después del choque:



Se conservan el momentum lineal y la energía cinética, ya que el choque es elástico:

$$p_i = p_f \Rightarrow mv_0 = mv_1 + mv_f$$
$$K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Despejando:

$$v_0 = v_1 + v_f \Rightarrow v_f = v_0 - v_1$$
$$v_0^2 = v_1^2 + v_f^2 = v_1^2 + (v_0 - v_1)^2$$
$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 + v_1)(v_0 - v_1) = (v_0 - v_1)^2$$

Con lo que $v_1 = v_0 \Rightarrow v_f = 0$, lo que no tiene sentido, ya que el momentum se transfiere, o bien:

$$v_0 + v_1 = v_0 - v_1 \Rightarrow 2v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow v_f = v_0$$

En consecuencia, la masa 1 choca a la 2, quedándose la masa 1 quieta y dándole a la masa 2 la misma velocidad con la que la 1 inicia su movimiento. Por eso se considera un choque ”trivial”.

2) Segunda colisión: asumiendo que la masa 3 se encuentra ligeramente trasladada hacia abajo en el eje Y, el choque rasante produce que las masas se separen, de manera que la masa 2 emerge con un cierto ángulo θ con respecto al eje X, y la masa 3 se sumerge con un cierto ángulo φ.

Como el choque es bidimensional, aplicamos conservación del vector momentum lineal, y de la energía cinética, al ser elástico:

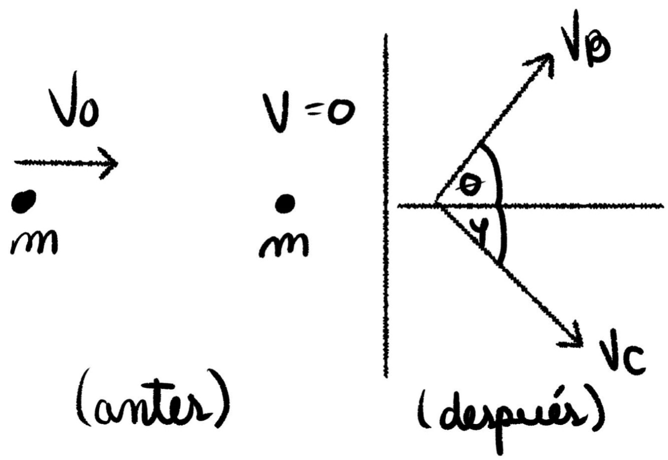
$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m} = \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m} \Rightarrow p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2$$

Elevando al cuadrado la ecuación de conservación del momentum y reemplazando el valor de p_{1i}^2:

$$p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = p_{1i}^2 + 2\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} \Rightarrow \vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0$$

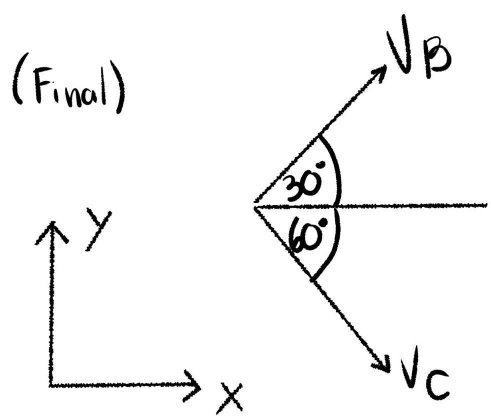
Veámoslo gráficamente. Reemplazando A,B y C para las masas 1,2 y 3:



El enunciado nos dice que una de las masas emerge con un ángulo de 30º. Escogemos $\theta = 30º$:

$$\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = p_{1f}p_{2f}\cos(\theta + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(30º + \varphi) = 0 \Rightarrow 30º + \varphi = 90º$$

Con lo que $\varphi = 60º$ y el dibujo para la segunda colisión queda:



Aplicamos conservación del momentum lineal por cada componente:

$$x : mv_0 = mv_B\text{cos}(30^o) + mv_C\text{cos}(60^o) \quad (1)$$
$$y : 0 = mv_B\text{sen}(30^o) - mv_C\text{sen}(60^o) \quad (2)$$

Cancelando las masas y reemplazando los valores de las funciones trigonométricas, obtenemos:

$$v_B\frac{1}{2} = v_C\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{3}v_C$$

Reemplazando esto en (1), obtenemos las velocidades de las masas B y C luego del choque:

$$v_0 = \sqrt{3}v_C\frac{\sqrt{3}}{2} + v_C\frac{1}{2} = \frac{3}{2}v_C + \frac{1}{2}v_C = 2v_C \Rightarrow v_C = \frac{v_0}{2} \Rightarrow v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$$

Finalmente, determinamos los vectores momentum lineal luego del segundo choque:

$$\boxed{\vec{p}_A = \vec{0}}$$

$$\vec{p}_B = mv_B\text{cos}(30^o)\hat{\imath} + mv_B\text{sen}(30^o)\hat{\jmath} = mv_0\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + mv_0\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{p}_B = \frac{3}{4}mv_0\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{4}mv_0\hat{\jmath}}$$

$$\vec{p}_C = mv_C\text{cos}(60^o)\hat{\imath} - mv_C\text{sen}(60^o)\hat{\jmath} = mv_0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\hat{\imath} - mv_0\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{p}_C = \frac{1}{4}mv_0\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{4}mv_0\hat{\jmath}}$$

b) 1) Primer choque: por conservación del momentum lineal:

$$p_i = p_f \Rightarrow mv_0 = mv_A + 2mv_B \Rightarrow v_0 - v_A = 2v_B \quad (1)$$

Por conservación de la energía cinética:

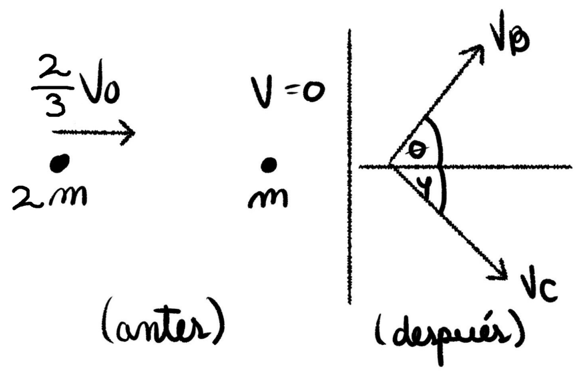
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 2v_B^2 \Rightarrow v_0^2 - v_A^2 = 2v_B^2$$
$$(v_0 + v_A)(v_0 - v_A) = (v_0 + v_A)2v_B = 2v_B^2 \Rightarrow v_0 + v_A = v_B \quad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) + (2) obtenemos la velocidad final de la masa 1 y la velocidad intermedia (entre el primer y segundo choque) de la masa 2:

$$2v_0 = 3v_B \Rightarrow v_B = \frac{2}{3}v_0$$

$$v_A = v_B - v_0 = \frac{2}{3}v_0 - \frac{3}{3}v_0 \Rightarrow v_A = -\frac{v_0}{3}$$

2) Segundo choque: actualizamos el subíndice para la masa 2. Gráficamente, con $\theta = 30^o = \pi/6$:



Notamos que ahora, $\theta + \varphi \neq 90^o$. Por conservación del momentum lineal, por componentes:

$$x : 2m\frac{2}{3}v_0 = 2mv_B\cos\theta + mv_C\cos\varphi \quad (1)$$

$$y : 0 = 2mv_B\text{sen}\theta - mv_C\text{sen}\varphi \quad (2)$$

Primero, cancelamos el factor masa m y hacemos la operación (1)senφ + (2)cosφ:

$$\frac{4}{3}v_0\text{sen}\varphi = 2v_B(\text{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\text{sen}\varphi)$$

$$\frac{2}{3}v_0\text{sen}\varphi = v_B\text{sen}(\theta + \varphi) \quad (3)$$

Análogamente, haciendo (1)senθ − (2)cosθ:

$$\frac{4}{3}v_0\text{sen}\theta = v_C(\text{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\text{sen}\varphi) = v_C\text{sen}(\theta + \phi) \quad (4)$$

Por conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}2m\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 = \frac{1}{2}2mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow \frac{8}{9}v_0^2 = 2v_B^2 + v_C^2 \quad (5)$$

Reemplazando (3) y (4) en (5), obtenemos una ecuación para φ:

$$\frac{8}{9}v_0^2 = \frac{8v_0^2\text{sen}^2\varphi}{9\text{sen}^2(\theta+\varphi)} + \frac{16v_0^2\text{sen}^2\theta}{9\text{sen}^2(\theta+\varphi)}$$

$$\text{sen}^2(\theta + \varphi) = \text{sen}^2\varphi + 2\text{sen}^2\theta$$

Reemplazando $\theta = 30^o = \pi/6$:

$$\text{sen}^2\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{sen}^2(\varphi + \pi/6) = \text{sen}^2\varphi + \frac{1}{2}$$

Notamos que $\varphi = \theta = \pi/6 = 30^{\circ}$ es solución, ya que:

$$\text{sen}^2(\pi/6 + \pi/6) = \text{sen}^2(2\pi/6) = \text{sen}^2(\pi/3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}^2(\pi/6) + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Por otro lado, de (2) se sabe que:

$$2v_B\text{sen}\theta = v_C\text{sen}\varphi \Rightarrow v_B = \frac{v_C\text{sen}\varphi}{2\text{sen}\theta} = \frac{v_C}{2}$$

Reemplazando en (1), notando que $\cos\theta = \cos\varphi = \sqrt{3}/2$:

$$\frac{4}{3}v_0 = \frac{2v_C}{2}\cos\theta + v_C\cos\varphi = \sqrt{3}v_C \Rightarrow v_C = \frac{4}{3\sqrt{3}}v_0 = \frac{4\sqrt{3}}{9}v_0$$

Luego se conoce v_B:

$$v_B = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0$$

Entonces, los momenta finales para cada masa son:

$$\boxed{\vec{p}_A = -\frac{mv_0}{3}\hat{\imath}}$$

$$\vec{p}_B = 2mv_B(\cos\theta\hat{\imath} + \text{sen}\theta\hat{\jmath}) = \frac{4\sqrt{3}mv_0}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\vec{p}_B = \frac{2}{3}mv_0\hat{\imath} + \frac{2\sqrt{3}}{9}mv_0\hat{\jmath}}$$

$$\vec{p}_C = mv_C(\cos\varphi\hat{\imath} - \text{sen}\varphi\hat{\jmath}) = \frac{4\sqrt{3}mv_0}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\vec{p}_C = \frac{2}{3}mv_0\hat{\imath} - \frac{2\sqrt{3}}{9}mv_0\hat{\jmath}}$$