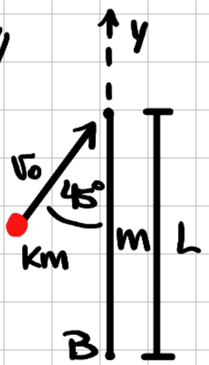
Auxiliar 17

26/05

P1//



Se conserva tanto momento lineal, momento angular y energía. Por $\vec{p}$:

$$\vec{p}_{mi} + \vec{p}_{bi} = \vec{p}_{mf} + \vec{p}_{bf}$$

Subíndice m para la masa y b para la barra. Separando por componentes:

$\hat{x}$] $Km V_0 \cos(\pi/4) + 0 = 0 + m v_{cmx} \rightarrow v_{cmx} = K v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\hat{y}$] $Km V_0 \sin(\pi/4) + 0 = Km v_y + m \cancel{v_{cmy}}^{0} \rightarrow v_y = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$

* Como no hay roce, no hay cambio de momentum en la componente $\hat{y}$ de la barra.

Por momento angular con respecto al centro de masa:

$$\vec{L}_{mi} + \cancel{\vec{L}_{bi}}^{0} = \vec{L}_{mf} + \vec{L}_{bf}$$

$$Km\left(\frac{L}{2}\hat{y}\right) \times \left(V_0\cos(\pi/4)\hat{x} + V_0 \cancel{\sin(\pi/4)\hat{y}}\right) = \cancel{Km\left(\frac{L}{2}\hat{y}\right) \times (v_y \hat{y})} + I_{CM}\,\omega \hat{z}$$

$$KmLv_0 \frac{\sqrt{2}}{4} = I_{CM}\,\omega$$

$$\omega = \frac{KmLv_0\sqrt{2}}{4I}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}Kmv_0^2 = \frac{1}{2}Kmv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m v_{CMx}^2$$

$$\frac{1}{2}K\cancel{m}\cancel{v_0^2} = \frac{1}{4}K\cancel{m}\cancel{v_0^2} + \frac{1}{2}\cancel{I} \cdot \frac{K^2m^{\cancel{2}}L^2\cancel{v_0^2} \cdot 2}{16I^{\cancel{2}}} + \frac{1}{4}\cancel{m}K^2\cancel{v_0^2}$$

$$\frac{1}{4}K = \frac{1}{16}K^2\cancel{mL^2} \cdot \frac{12}{\cancel{mL^2}} + \frac{1}{4}K^2$$

* $I = mL^2/12$

$$K = 3K^2 + K^2 \rightarrow K(4K-1) = 0$$

$$\therefore K = 0 \lor K = 1/4$$

Como $K = 0$ no tiene sentido, se concluye $K = 1/4$

b) La velocidad de B inmediatamente después del choque será:

$$V_B = V_{CMX} - w\frac{L}{2} = Kv_0\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{K\cancel{m}Lv_0\sqrt{2}}{4}\left(\frac{12}{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}\right)\cdot\frac{\cancel{L}}{2}$$

$$V_B = Kv_0\frac{\sqrt{2}}{2} - Kv_0 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -Kv_0\sqrt{2} = -v_0\frac{\sqrt{2}}{4}$$

P2// Como no hay torques externos, el momento angular se conserva. Así:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_2 w = (I_1 + I_2)\Omega$$

$$\therefore \Omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2}w$$

b) La energía cinética rotacional está dada por $K_r = \frac{1}{2}Iw^2$. Con esto, la relación entre energías será:

$$K_i = \frac{1}{2}I_2 w^2 \quad \wedge \quad K_f = \frac{1}{2}\cancel{(I_1 + I_2)}\frac{I_2^2 w^2}{(I_1 + I_2)^{\cancel{2}}} = \frac{I_2^2 w^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_2^2}{(I_1 + I_2)I_2} = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

c) Sobre el disco I_2 se ejerce un torque τ_0 que lo frena. El mismo actúa sobre I_1 pero en sentido contrario. La aceleración angular de cada disco será:

$$\alpha_1 = \frac{\tau_0}{I_1} \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{\tau_0}{I_2}$$

Luego, las velocidades angulares para cada disco serán:

$$w_1(t) = \alpha_1 t \quad \wedge \quad w_2 = w - \alpha_2 t$$

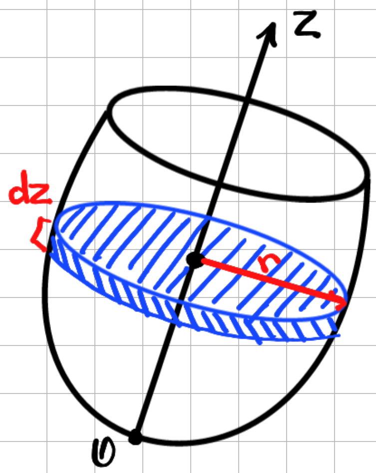
Cuando se alcanza la velocidad angular Ω en t^* las ecuaciones serán iguales:

$$\Omega = w_1(t^*) = w_2(t^*) \Rightarrow \alpha_1 t^* = w - \alpha_2 t^*$$

$$\therefore t^* = \frac{w}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{I_1 I_2 w}{\tau_0(I_1 + I_2)}$$

P3// Sea Z el eje de rotación del paraboloide y el origen de coordenadas el vértice.

Se nos pregunta por el momento angular, que será la suma de todos los momentos angulares de las secciones transversales de este para cada altura, es decir:



Este elemento "cilíndrico" tiene un volumen $dV = \pi r^2 dz$

Supongamos que la densidad del cuerpo es ρ. Así, la masa que tiene este elemento es:

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$$

El radio lo podemos encontrar mediante la ecuación del paraboloide:

$$z = Kr^2 \quad \wedge \quad H = KR^2 \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{R^2}{H} z\right)^{1/2}$$

El momento de inercia de este será $dI = \frac{1}{2} dm\, r^2$. La suma de todos estos pedacitos serán el momento de inercia total:

$$I = \int dI = \int \frac{1}{2} r^2 dm = \int \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \int \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{R^4}{H^2} z^2\right) dz = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z^2 dz$$

$$\therefore I = \frac{1}{6} \rho \pi R^4 H$$

Pero ρ no es conocido. Lo encontramos mediante la siguiente expresión:

$$M = \int \rho dm = \int_0^H \rho \pi \left(\frac{R^2}{H} z\right) dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2M}{\pi R^2 H}$$

Y así el momento de inercia resulta:

$$I = \frac{1}{3} M R^2$$

Y el momento angular:

$$L = I w = \frac{1}{3} M R^2 w$$

b) La frecuencia angular del movimiento de precesión esta dada por $\frac{Mgh}{L}$, siendo h la distancia del centro de masas al punto de apoyo

$$h = z_{CM} + a$$

Para z_{CM} usamos la expresión:

$$z_{cm} = \int z\,dm / M = \cancel{\rho}\int z\,dV / \cancel{\rho}\int dV = \int z\,dV / V$$

Se calcula cada integral:

- $\int z\,dV = \int_0^H \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R^2}{H}z\right) z\,dz = \frac{1}{6}\pi R^2 H^2$
- $\int dV = \int_0^H \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R^2}{H}z\right) dz = \frac{1}{2}\pi R^2 H$

$$\therefore z_{CM} = \frac{2}{3}H$$

Con esto la frecuencia será:

$$\Omega = \frac{Mg\left(\frac{2}{3}H + a\right)}{L} = \frac{g(2H + 3a)}{R^2 W} \Big/ h$$