FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 18

Conceptos útiles:

- Definición: Momentum angular con respecto a punto $\mathcal{O}$ (típicamente un origen).

  $$\vec{l}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

  Interesa: su conservación, y su relación con el torque, el momento de inercia y la velocidad angular.

- Teorema: Suma de momenta angulares con respecto a punto $\mathcal{O}$:

  $$\vec{l}_{\mathcal{O}}^{tot} = \sum_i \vec{l}_{\mathcal{O}}^{i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

  Observación: Para un sistema extendido, se cambia la suma por una integral $\sum \rightarrow \int$

- Teorema: Si un sistema rota en torno a un punto fijo P:

  $$\vec{l}_P = I_P \vec{\omega}$$

  Donde I_P es el momento de inercia con respecto al eje perpendicular que pasa por P.

- Definición: Momento de inercia

  $$I_P = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{(discreto)}$$
  $$I_P = \int r^2 dm \quad \text{(continuo)}$$

  Con:

  $$dm = \begin{cases} \lambda dl & (1D) \\ \sigma dS & (2D) \\ \rho d\mathcal{V} & (3D) \end{cases}$$

  Donde λ, σ y ρ son la densidad lineal, superficial y volumétrica respectivamente.

- Teorema: Caso general para el momentum angular (componente traslacional + rotacional)

  $$\vec{l}_P = \vec{R} \times \vec{P} + I_{cm} \vec{\omega}$$

  Donde $\vec{R}$ une al punto P con el centro de masa cm, $\vec{P}$ es el momentum lineal del centro de masa, I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje perpendicular que pasa por el cm y $\vec{\omega}$ la velocidad angular en torno a dicho eje. Descomposición del sistema en partícula (en el cm) + sistema extendido.

- Teorema: El torque neto con respecto a un punto P, $\vec{\tau}_P = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, cumple que

$$\vec{\tau}_P = \frac{d\vec{l}_P}{dt}$$

Observación: por cada componente nula, se conserva el momentum angular en dicha componente.

- Definición: Energía mecánica de un sistema extendido

$$E = K_{tras} + K_{rot} + U = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_P\omega^2 + U$$

Observación: Si $U = U_g = \pm Mgh_{cm}$, con h_{cm} la altura (+) o profundidad (-) del centro de masa.

- Teorema: Si el sistema rota en torno a un punto fijo P, $K_{tras} = 0$

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega^2 + U$$

Observación: Si la energía se conserva, su derivada temporal $\dot{E} = 0$ da la ecuación de movimiento.

- Teorema: Ejes paralelos de Steiner

$$I_P = I_{cm} + MR^2$$

Donde M es la masa del sistema y R es la distancia entre los puntos P y cm.

Observaciones:

  - Se usará cm (centro de masa) o G (centro de gravedad) indistintamente.
  - Todo lo anterior luego lo generalizaremos para rotaciones en 3D (después de ver SRNI).

Problemas:

1. *a*) Como ambos cuerpos son continuos:

$$I = \int r^2 dm$$

Para el caso del disco uniforme, asumiendo que tiene masa M y radio R:

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{\pi R^2} r dr d\phi$$

Con esto, el momento de inercia del disco con respecto a su centro de masa es:

$$I_{cm}^D = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} r dr d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr$$

$$I_{cm}^D = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

El cual es un resultado conocido para el I_{cm} de un disco y, por simetría, de un cilindro.

Para el caso de la barra uniforme, de masa M y largo L:

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{L}dx$$

Con esto, el momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masa es:

$$I_{cm}^B = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L}dx = \frac{M}{3L}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{-L}{2}\right)^3\right)$$

$$I_{cm}^B = \frac{M}{3L}\frac{2L^3}{8} = \frac{1}{12}ML^2$$

El cual es también un resultado conocido, para el I_{cm} de una barra uniforme.
Volviendo al caso del disco, reemplazamos los datos del enunciado:

$$I_{cm}^D = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{64}ML^2$$

A continuación, usaremos el teorema de ejes paralelos de Steiner para calcular los momentos de inercia de ambos cuerpos con respecto al eje que pasa por el origen $\mathcal{O}$ en el extremo superior:

$$I_{\mathcal{O}}^D = I_{cm}^D + \frac{M}{2}R_D^2$$

$$I_{\mathcal{O}}^B = I_{cm}^B + MR_B^2$$

Con:

$$R_D = L + \frac{L}{4} = \frac{5}{4}L$$

$$R_B = \frac{L}{2}$$

Reemplazando en los momentos de inercia:

$$I_{\mathcal{O}}^D = \frac{1}{64}ML^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{5}{4}L\right)^2 = \frac{51}{64}ML^2$$

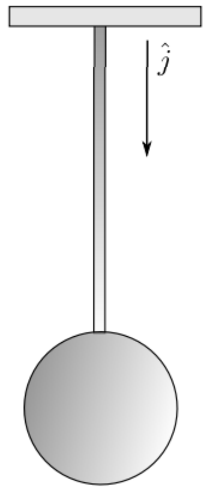
$$I_{\mathcal{O}}^B = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Siendo el último un resultado conocido para el momento de inercia de una barra uniforme con respecto a uno de sus extremos. Sumamos los momentos de inercia para obtener del sistema:

$$I_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}^D + I_{\mathcal{O}}^B \equiv I$$

$$\boxed{I = \frac{217}{192}ML^2}$$

b) El cálculo del centro de masa se puede hacer por definición. Recordemos que éste es el punto que caracteriza el movimiento del sólido como si fuese una partícula puntual. Primero consideramos el sistema de forma fija, cuando está en la posición de equilibrio $\theta = 0$, usando un eje y auxiliar:



Haremos el siguiente truco: calcularemos el centro de masa **de los centros de masa** de la barra y el disco. De esta manera, reducimos el análisis a la descripción discreta del centro de masa:

$$\vec{R}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{M\frac{L}{2} + \frac{M}{2}\left(L + \frac{L}{4}\right)}{M + \frac{M}{2}}\hat{\jmath} = \frac{3}{4}L\hat{\jmath}$$

Notamos que:

$$\hat{\jmath} = \text{sen}0\hat{\imath} + \cos 0\hat{\jmath} = \cos(\pi/2 - 0)\hat{\imath} + \text{sen}(\pi/2 - 0)\hat{\jmath} = \hat{r}(\pi/2)$$

Por lo que para una posición angular θ, el vector unitario de $\vec{R}_G$ será:

$$\hat{r} = \cos(\pi/2 - \theta)\hat{\imath} + \text{sen}(\pi/2 - \theta)\hat{\jmath} = \text{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$$

Finalmente, la posición del centro de masas es:

$$\boxed{\vec{R}_G = \frac{3}{4}L\hat{r}}$$

c) Para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones, tenemos dos opciones:

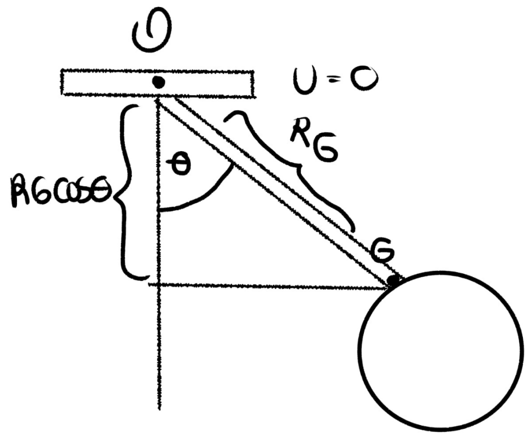
i) Energía: como el péndulo rota con respecto a un punto fijo $\mathcal{O}$, ocupamos

$$E = \frac{1}{2}I_{\mathcal{O}}\dot{\theta}^2 + U$$

Donde U es la energía potencial gravitatoria:

$$U = -\frac{3}{2}Mgh_G = -\frac{3}{2}MgR_G\cos\theta = -\frac{3}{2}Mg\frac{3}{4}L\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{9}{8}MgL\cos\theta$$



Como el sistema es conservativo, $E = cte$. Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{9}{8}MgL\text{sen}\theta\dot{\theta} \Rightarrow I\ddot{\theta} + \frac{9}{8}MgL\text{sen}\theta = 0$$

Con esto tenemos la ecuación de movimiento para el péndulo sólido:

$$\ddot{\theta} + \frac{9MgL}{8I}\text{sen}\theta = 0$$

Imponemos régimen de pequeñas oscilaciones (p.o.): $\theta \ll 1$, $\text{sen}\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{9MgL}{8I}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9MgL}{8I}$$

Finalmente:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{9MgL}{8I}}}$$

ii) Torque: usaremos la ecuación de torque con respecto al pivote fijo $\mathcal{O}$

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \frac{d\vec{l}_{\mathcal{O}}}{dt} \quad ; \quad \vec{l}_{\mathcal{O}} = I\dot{\theta}\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau}_{\mathcal{O}} = I\ddot{\theta}\hat{k}$$

Calculamos el torque neto por definición. La única fuerza que hace torque es el peso:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \vec{R}_G \times M\vec{g} = \frac{3}{4}L(\text{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) \times \left(-\frac{3}{2}Mg\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = -\frac{9}{8}MgL\text{sen}\theta\hat{k} = I\ddot{\theta}\hat{k}$$

Con lo que llegamos a la ecuación de movimiento:

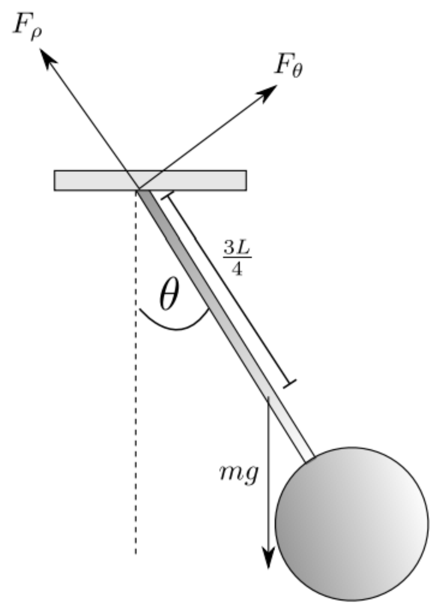
$$I\ddot{\theta} = -\frac{9}{8}MgL\text{sen}\theta$$

Nuevamente, imponemos pequeñas oscilaciones para calcular la frecuencia:

$$\ddot{\theta} = -\frac{9MgL}{8I}\theta$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{9MgL}{8I}}}$$

d) En esta parte debemos hacer el DCL:



Con $m = \frac{3}{2}M$ la masa del péndulo. Descomponemos el peso y usamos 2da Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{A}_G \Rightarrow -\frac{3}{2}Mg\text{sen}\theta\hat{\theta} + \frac{3}{2}Mg\cos\theta\hat{r} - F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} = -\frac{3}{2}M\frac{3}{4}L\dot{\theta}^2\hat{r} + \frac{3}{2}M\frac{3}{4}L\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Separando en componentes radial y angular:

$$\hat{r} : \frac{3}{2}Mg\cos\theta - F_r = -\frac{3}{2}M\frac{3}{4}L\dot{\theta}^2 \Rightarrow F_r = \frac{9}{8}ML\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}Mg\cos\theta$$

$$\hat{\theta} : -\frac{3}{2}Mg\text{sen}\theta + F_\theta = \frac{3}{2}M\frac{3}{4}L\ddot{\theta} \Rightarrow F_\theta = \frac{9}{8}ML\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Mg\text{sen}\theta$$

Recordamos que el péndulo oscila con pequeña amplitud: $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$:

$$F_r = \frac{9}{8}ML\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}Mg$$
$$F_\theta = \frac{9}{8}ML\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Mg\theta$$

Para encontrar su dependencia temporal, resolvemos la ecuación de movimiento para p. o.:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\text{sen}(\omega t)$$

Las condiciones iniciales son: $\theta(0) = 0$ y $\frac{3}{4}L\dot{\theta}(0) = v_0 \Rightarrow \dot{\theta}(0) = \frac{4v_0}{3L}$

$$\theta(0) = A + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = B\omega = \frac{4v_0}{3L} \Rightarrow B = \frac{4v_0}{3L\omega}$$

$$\theta(t) = \frac{4v_0}{3L\omega}\text{sen}(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{4v_0}{3L}\cos(\omega t) \quad , \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{4v_0\omega}{3L}\text{sen}(\omega t)$$

Reemplazando lo anterior en las componentes de la fuerza de contacto con el eje:

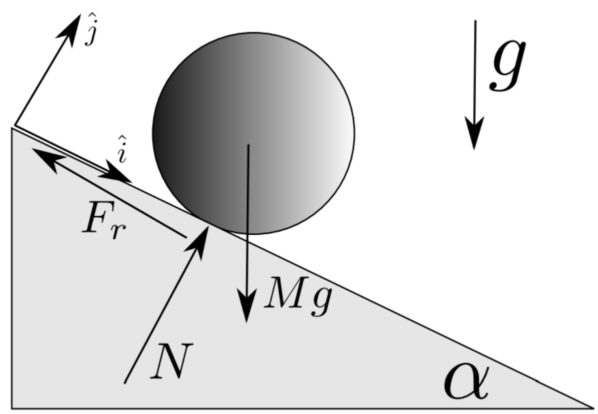
$$\boxed{F_r(t) = \frac{2Mv_0^2}{L}\cos^2(\omega t) + \frac{3}{2}Mg}$$

$$\boxed{F_\theta(t) = -\frac{3Mv_0\omega}{2}\text{sen}(\omega t) + \frac{2Mgv_0}{L\omega}\text{sen}(\omega t)}$$

2. *a*) Sea x el desplazamiento horizontal del cilindro. La condición de **rodar sin resbalar (rsr)** es:

$$dx = -Rd\theta \Rightarrow x = -R\theta \quad , \quad \dot{x} = -R\dot{\theta} \quad , \quad \ddot{x} = -R\ddot{\theta}$$

Donde el signo negativo indica que la rotación es en sentido horario (regla de la mano derecha). Hacemos el DCL del cilindro:



Tomemos el momentum angular con respecto al centro de masa. Vemos que:

$$\vec{l}_G = -I_G\dot{\theta}\hat{k}$$

Donde I_G es el momento de inercia con respecto al eje del cilindro. Se sabe que:

$$I_G = \frac{1}{2}MR^2$$

Por lo tanto:

$$\vec{l}_G = -\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}\hat{k}$$

Ahora, usaremos la ecuación de torque con respecto al centro de masa. Notamos que la fuerza normal no hace torque, ya que pasa paralela a G. Por otro lado, el peso no hace torque, ya que tiene brazo de palanca nulo. Así, el torque neto es debido únicamente al de la fuerza de roce:

$$\vec{\tau}_G = (-R\hat{j}) \times (-F_R\hat{\imath}) = -RF_R\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_G = \frac{d\vec{l}_G}{dt} = -I_G\ddot{\theta}\hat{k} = -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}\hat{k}$$

En consecuencia, y notando que por rsr, $R\ddot{\theta} = \ddot{x}$:

$$-\frac{1}{2}MR\ddot{x} = -RF_R \Rightarrow F_R = \frac{1}{2}M\ddot{x}$$

Aún nos falta una ecuación para F_R. La obtendremos a partir de la 2da Ley de Newton

$$\vec{R}_G = x\hat{i} + R\hat{j} \Rightarrow \vec{A}_G = \ddot{x}\hat{i}$$

$$M\vec{A}_G = M\ddot{x}\hat{i} = -F_R\hat{i} + N\hat{j} - Mg(-\text{sen}\alpha\hat{i} + \cos\alpha\hat{j})$$

Separando en componentes escalares:

$$\hat{i} : M\ddot{x} = -\frac{1}{2}M\ddot{x} + Mg\text{sen}\alpha \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} = Mg\text{sen}\alpha$$

$$\hat{j} : N - Mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\alpha$$

La ecuación para la coordinada paralela al plano inclinado nos entrega la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2g}{3}\text{sen}\alpha} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{3}g\text{sen}\alpha t^2$$

Suponiendo que el cilindro se deja caer desde la cima del plano inclinado, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$:

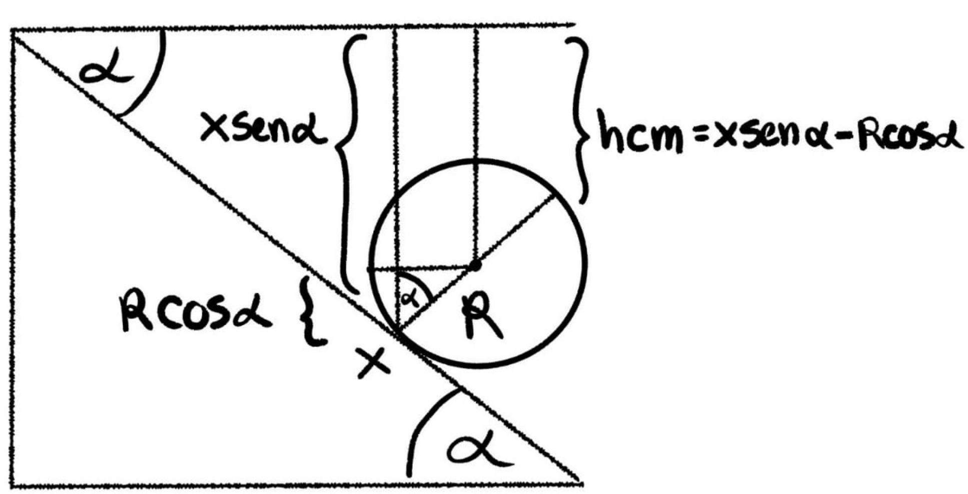
$$x(t) = \frac{1}{3}g\text{sen}\alpha t^2$$

b) Por conservación de la energía:

$$E = K_{tras} + K_{rot} + U = cte$$

Se escoge $U = 0$ en la cima del plano inclinado:

$$U = -Mg(x\text{sen}\alpha - R\cos\alpha) = -Mgx\text{sen}\alpha + MgR\cos\alpha$$



Por otro lado, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

Con $V_G = \dot{x}$. Reemplazando esto y el momento de inercia del cilindro con respecto a G:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

Por la condición de rodar sin resbalar, $R^2\dot{\theta}^2 = \dot{x}^2$, se tiene que:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M\dot{x}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

Reemplazando las expresiones para la energía cinética y potencial:

$$E = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - Mgx\text{sen}\alpha + MgR\text{cos}\alpha$$

Derivando con respecto al tiempo, y notando que $MgR\text{cos}\alpha = cte$:

$$\dot{E} = 0 = \frac{3}{2}M\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x}\text{sen}\alpha \Rightarrow \frac{3}{2}\ddot{x} - g\text{sen}\alpha = 0$$

Llegamos a la misma ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2g}{3}\text{sen}\alpha}$$

Se puede usar la conservación de la energía, ya que la fuerza de roce no hace trabajo, debido a que el cilindro rueda sin resbalar. Es interesante notar que, por otro lado, si produce torque.