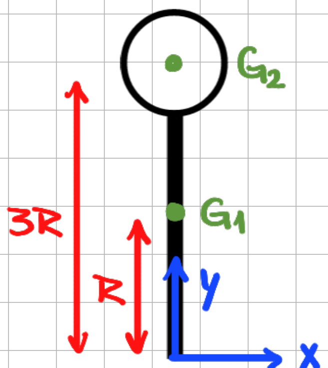
Auxiliar 19

02/06

P1// El centro de masas será el centro de masas de los centros de masas de cada uno de los objetos



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{2m}\left(mR\hat{y} + 3mR\hat{y}\right) = 2R\hat{y}$$

Por conservación de momento lineal:

$$p_i = p_f \Rightarrow mv = 2mv_f \Rightarrow v_f = v/2$$

Usando conservación de momento angular:

$$l_i = mvR^{*} + I_d\omega$$

Para l_f, como sabemos los momentos angulares respecto a sus centros, usamos Teorema de Steiner:

* Distancias al centro de masa del sistema

$$l_f = (I_d + mR^{2*})\omega_f + (I_b + mR^{2*})\omega_f$$

Igualando:

$$mvR + I_d\omega = \omega_f(I_d + I_b + 2mR^2)$$

$$\omega_f = \frac{mvR + I_d\omega}{\underbrace{I_d + I_b + 2mR^2}_{I_t}}$$

b) La energía inicial será:

$$E_i = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_d\omega^2}{2}$$

Y el final:

$$E_f = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I_t\omega_f^2}{2} = \frac{mv^2}{4} + \frac{(mvR + I_d\omega)^2}{2I_t}$$

Luego la diferencia de energía:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{mv^2}{4} + \frac{(mvR + I_d\omega)^2}{2I_t} + \frac{I_d\omega^2}{2}$$

Se ocupa energía en el momento del acople, lo que lo hace un choque inelástico.

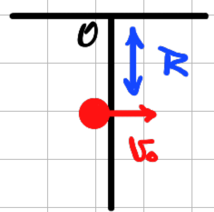
c) Para encontrar la velocidad que minimiza la pérdida de energía, se deriva la expresión encontrada respecto a v, se iguala a 0 y se despeja. Esto es:

$$\frac{\partial(\Delta E)}{\partial v} = -\frac{mv}{2} + \left(\frac{mvR + I_d\omega}{I_t}\right)\cdot mR = 0$$

$$mv\left(\frac{1}{2} - \frac{mR^2}{I_t}\right) = \frac{mRI_d\omega}{I_t} \rightarrow v = \left(\frac{mRI_d\omega}{\cancel{I_t}}\right)\left(\frac{2\cancel{I_t}}{I_t - 2mR^2}\right)$$

$$v = \frac{2mRI_d\omega}{I_d + I_b + 2\cancel{mR^2} - 2\cancel{mR^2}} = \frac{2mRI_d}{I_d + I_b}\omega \;//$$

P2// Consideramos el momento angular un instante antes de la colisión.



$$\vec{l}_i = \vec{r}\times\vec{p} = R\hat{\rho}\times mv_0\hat{\phi} = mRv_0\hat{k}$$

b) El momentum final es del sistema barra partícula:

$$\vec{l}_f = \vec{l}_{partícula} + \vec{l}_{barra}$$

$$\vec{l}_f = (R\hat{\rho}\times mR\dot{\phi}\hat{\phi}) + \left(\int_{barra}\vec{r}\times d\vec{p}\right)$$

* $\int_{barra}\vec{r}\times d\vec{p}$, $\vec{r}$ posición de partícula arbitraria en la barra. $d\vec{p}$ diferencial de momentum, esto es, la pequeña cantidad de masa que tiene la partícula, por su velocidad.

Para una partícula arbitraria en la barra, su posición es $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ y su momento es $d\vec{p} = \rho\dot{\phi}dm\hat{\phi} = \rho\dot{\phi}\lambda d\rho\hat{\phi}$, con λ la densidad lineal a lo largo de la barra, que será:

$$\lambda = m/2R$$

Reemplazando:

$$\vec{l}_f = mR^2\dot{\phi}\hat{k} + \frac{m}{2R}\dot{\phi}\int_0^{2R}\rho^2 d\rho = \left(mR^2\dot{\phi} + \frac{4}{3}mR^2\dot{\phi}\right)\hat{k}$$

$$\vec{l}_f = \frac{7}{3}mR^2\dot{\phi}\hat{k}$$

c) En $t=0$ no hay torques externos, por lo que se conserva el momento angular. Así:

$$\vec{l}_i = \vec{l}_f$$

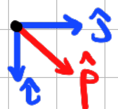
$$mRv_0\hat{k} = \frac{7}{3}mR^2\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\dot{\phi} = {}^{3v_0}/_{7R}$$

d) Para ecuación de movimiento aplicamos ecuación de torque para un ángulo ϕ arbitrario:

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{\tau}_{partícula} + \vec{\tau}_{barra}$$

La única fuerza externa es el peso. El torque de la partícula se tiene directamente:



$$\vec{\tau}_{partícula} = \vec{r}\times\vec{F} = R\hat{\rho}\times mg\hat{\imath} = R(\cos(\phi)\hat{\imath}+\sin(\phi)\hat{\jmath})\times mg\hat{\imath}$$

$$\vec{\tau}_{partícula} = -mg\sin(\phi)\hat{k}$$

Para la barra se suman los pequeños torques que ejerce el peso sobre cada partícula, esto es:

$$\vec{\tau}_{barra} = \int_{barra}\vec{r}\times d\vec{F} = \int_{barra}\rho\hat{\rho}\times g\,dm\,\hat{\imath} = \int_{barra} -\rho\sin(\phi)\cdot\frac{mg}{2R}\,d\rho\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{barra} = -\frac{mg}{2R}\sin(\phi)\int_0^{2R}\rho\,d\rho = -mgR\sin(\phi)\hat{k}$$

Retomando:

$$\vec{\tau}_{Tot} = -2mgR\sin(\phi)\hat{k}$$

Relacionamos torque con momento angular, usando el resultado que teníamos para este:

$$\frac{d\vec{l}_{TOT}}{dt} = \vec{\tau}_{TOT}$$

$$\frac{7}{3}mR^2\ddot{\phi} = -2mg\sin(\phi)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{6g}{7R}\sin(\phi)$$

Multiplicamos la expresión por $\dot{\phi}$ para poder integrarla

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} = -\frac{6g}{7R}\sin(\phi)\dot{\phi}$$

Integrando entre 0 y t:

$$\int_0^t \ddot{\phi}\dot{\phi}\,dt = \int_0^t -\frac{6g}{7R}\sin(\phi)\dot{\phi}\,dt$$

$* \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \ddot{\phi}\dot{\phi} \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \ddot{\phi}\dot{\phi}\,dt \ , \ \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \rightarrow d\phi = \dot{\phi}\,dt$

$$\int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}(t)} d\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = -\frac{6g}{7R}\int_0^{\phi}\sin(\phi)\,d\phi$$

$$\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 - \frac{12}{7}(1-\cos(\phi))$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{9v_0^2}{49R^2} - \frac{12}{7}(1-\cos(\phi))}$$