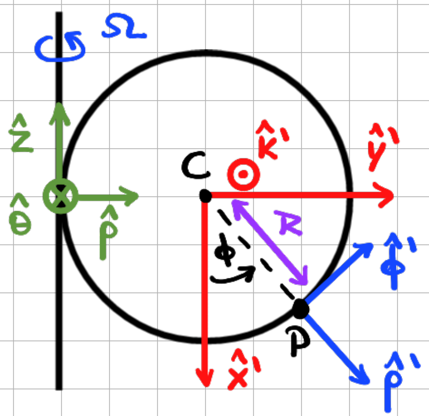
Auxiliar 21

09/06

P1/



Definimos Sistemas de referencias junto con sus coordenadas:

- SRI coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$ centrado en O.
- SRNI coordenadas cartesianas $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$ y coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}', \hat{\phi}', \hat{k}')$

Escribimos vectores unitarios de S en función de los de S':

$$\hat{\rho} = \hat{y}' \ , \ \hat{z} = -\hat{x}' \ , \ \hat{\theta} = -\hat{k}'$$

También será útil relacionar los vectores unitarios del SRNI:

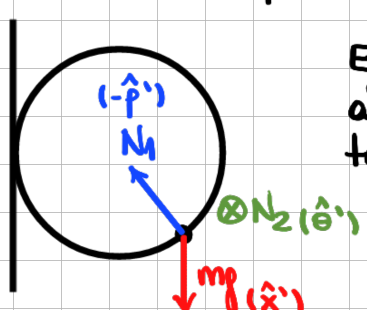
$$\hat{\rho}' = \cos(\phi)\hat{x}' + \sin(\phi)\hat{y}' \ , \ \hat{\phi}' = -\sin(\phi)\hat{x}' + \cos(\phi)\hat{y}'$$

$$\hat{x}' = \cos(\phi)\hat{\rho}' - \sin(\phi)\hat{\phi}' \ , \ \hat{y}' = \sin(\phi)\hat{\rho}' + \cos(\phi)\hat{\phi}'$$

Calculamos $\vec{r}'$, $\vec{v}'$, $\vec{a}'$ (SRNI):

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}' \ , \ \vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}' \ , \ \vec{a}' = R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}'$$

Vemos las fuerzas que actúan sobre el sistema:



Evidentemente hay peso. Dado que está confinada al anillo, hay una normal N_1. Como el anillo también se mueve, hay una normal N_2.

$$\vec{F} = N_1(-\hat{\rho}') + N_2\underbrace{(-\hat{k}')}_{\hat{\theta}'} + mg\underbrace{(\cos(\phi)\hat{\rho}' - \sin(\phi)\hat{\phi}')}_{\hat{x}'}$$

Calculamos $\vec{\Omega}_e$ y $\dot{\vec{\Omega}}_e$:

$$\vec{\Omega}_e = \Omega\hat{z} = -\Omega\hat{x} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}}_e = 0$$

Calculamos $\vec{R}$, $\vec{V}$ y $\vec{A}$ (SRI)

$$\vec{R} = R\hat{\rho}\ ,\ \vec{V} = R\dot{\theta}\hat{\theta}\ ,\ \vec{A} = \cancel{R\ddot{\theta}}\hat{\theta} - R\overset{\Omega^2}{\cancel{\dot{\theta}^2}}\hat{\rho}$$

Calculamos fuerzas ficticias:

- $\vec{F}_{Tras} = -m\vec{A} = mR\Omega^2\hat{\rho} = mR\Omega^2(\sin(\phi)\hat{\rho}' + \cos(\phi)\hat{\phi}')$

- $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' = 2m\Omega R\dot{\phi}(\hat{x}'\times\hat{\phi}') = 2mR\Omega\dot{\phi}(\hat{x}'\times[-\cancel{\sin(\phi)\hat{x}} + \cos(\phi)\hat{y}])$

$$= 2mR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi)(\hat{x}'\times\hat{y}') = 2mR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi)\hat{k}'$$

- $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\Omega^2R(\hat{x}'\times[\hat{x}'\times\hat{\rho}']) = -m\Omega^2R(\hat{x}'\times\sin(\phi)\hat{k}')$

$$= m\Omega^2R\sin(\phi)\hat{y}' = m\Omega^2R\sin(\phi)(\sin(\phi)\hat{\rho}' + \cos(\phi)\hat{\phi}')$$

- $\vec{F}_{azi} = -m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = 0$

Escribimos 2^{da} Ley de Newton sobre SRNI:

$$\underbrace{m(R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}')}_{\vec{a}'} = -N_1\hat{\rho}' - N_2\hat{k}' + mg(\cos(\phi)\hat{\rho}' - \sin(\phi)\hat{\phi}') \quad \text{Reales}$$

$$+ mR\Omega^2(\sin(\phi)\hat{\rho}' + \cos(\phi)\hat{\phi}')$$
$$+ 2mR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi)\hat{k}' \quad \text{Ficticias}$$
$$+ m\Omega^2R\sin(\phi)(\sin(\phi)\hat{\rho}' + \cos(\phi)\hat{\phi}')$$

Y ahora separamos por componentes:

$\hat{\rho}'$] $-mR\dot{\phi}^2 = -N_1 + mg\cos(\phi) + mR\Omega^2\sin(\phi) + m\Omega^2R\sin^2(\phi)$

$\hat{\phi}'$] $mR\ddot{\phi} = -mg\sin(\phi) + mR\Omega^2\cos(\phi) + m\Omega^2R\sin(\phi)\cos(\phi)$

$\hat{k}'$] $0 = -N_2 + 2mR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi)$

De la componente $\hat{\phi}'$ identificamos el valor de f, tq:

$$\therefore f = -mg\sin(\phi) + mR\Omega^2\cos(\phi) + m\Omega^2 R\sin(\phi)\cos(\phi)$$

b) Nos piden U tq $f = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \phi} \rightarrow U = -R\int f d\phi$. Las dos primeras primitivos son sabidos. La tercera se calcula de la forma:

$$\int \sin(\phi)\cos(\phi)d\phi \text{ , } (u = \sin(\phi) \Rightarrow du = \cos(\phi)d\phi) = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\sin^2(\phi)$$

Luego:

$$\therefore U = mg\cos(\phi) + mR\Omega^2\sin(\phi) + \frac{1}{2}m\Omega^2 R\sin^2(\phi) + \cancel{C}^{0}$$

* Imponemos $C = 0$ ya que no afecta al análisis del problema.

c) Suponemos $R\Omega^2 \ll g$ y el punto de equilibrio cercano a 0. Con esto decimos:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \phi}\right|_{\phi_{eq}} = 0 \rightarrow f(\phi_{eq}) = 0$$

Reemplazando:

$$f(\phi_{eq}) = -\cancel{m}g\sin(\phi_{eq}) + \cancel{m}R\Omega^2\cos(\phi_{eq}) + \cancel{m}R\Omega^2\sin(\phi_{eq})\cos(\phi_{eq}) = 0$$

$$g\sin(\phi_{eq}) = R\Omega^2\cos(\phi_{eq}) + R\Omega^2\sin(\phi_{eq})\cos(\phi_{eq})$$

$$g/R\Omega^2 \cdot \tan(\phi_{eq}) = 1 + \sin(\phi_{eq})$$

* $\phi_{eq} \sim 0 \rightarrow \sin(\phi_{eq}) \sim \phi_{eq} \wedge \cos(\phi_{eq}) \sim 1 \rightarrow \tan(\phi_{eq}) \sim \phi_{eq}$

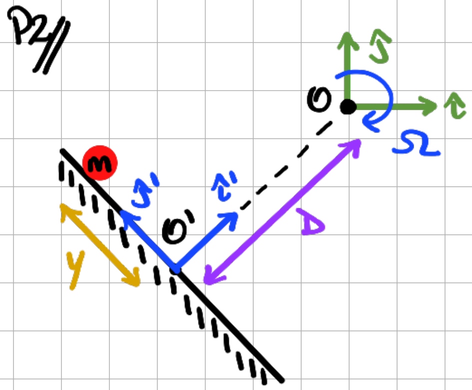
$$g/R\Omega^2 \cdot \phi_{eq} = 1 + \phi_{eq}$$

$$\phi_{eq}(1 - R\Omega^2/g) = R\Omega^2/g$$

* $R\Omega^2 \ll g \Rightarrow R\Omega^2/g \ll 1 \rightarrow 1 - R\Omega^2/g \sim 1$

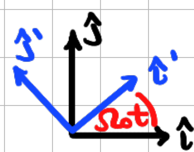
$$\therefore \phi_{eq} \sim R\Omega^2/g$$

P2//



• SRI coordenadas cartesianas $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

• SRNI coordenadas cartesianas $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$



$$\hat{\imath}' = \cos(\Omega_0 t)\hat{\imath} + \sin(\Omega_0 t)\hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath}' = -\sin(\Omega_0 t)\hat{\imath} + \cos(\Omega_0 t)\hat{\jmath}$$
$$\hat{k}' = \hat{k}$$

Calculamos $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$:

$$\vec{r}' = y\hat{\jmath} \quad , \quad \vec{v}' = \dot{y}\hat{\jmath} \quad , \quad \vec{a}' = \ddot{y}\hat{\jmath}$$

Fuerzas sobre el sistema:

$$\vec{F} = N\hat{\imath}'$$

* $\vec{g}$ está en $-\hat{k}$ así que no afecta al análisis del problema

Calculamos $\vec{\Omega}_e$ y $\dot{\vec{\Omega}}_e$:

$$\vec{\Omega}_e = \Omega_0 \hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}}_e = 0$$

Calculamos $\vec{R}$, $\vec{V}$ y $\vec{A}$:

$$\vec{R} = -D\hat{\imath}' \quad , \quad \vec{V} = -D\Omega_0 \hat{\jmath}' \quad , \quad \vec{A} = D\Omega_0^2 \hat{\imath}'$$

Calculamos fuerzas ficticias:

• $\vec{F}_{Tras} = -m\vec{A} = -mD\Omega_0^2 \hat{\imath}'$

• $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = -2m(\Omega_0 \hat{k} \times \dot{y}\hat{\jmath}) = 2m\Omega_0 \dot{y}\hat{\imath}'$

• $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -m(\Omega_0 \hat{k}) \times (\Omega_0 \hat{k} \times y\hat{\jmath}) = -m\Omega_0^2 y(\hat{k} \times -\hat{\imath}')$

$= m\Omega_0^2 y \hat{\jmath}'$

• $\vec{F}_{azi} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0$

Escribimos 2^{da} Ley de Newton sobre SRNI:

$$m\ddot{y}\hat{j}' = N\hat{i}' - mD\Omega_0^2\hat{i}' + 2m\Omega_0\dot{y}\hat{i}' + m\Omega_0^2 y\hat{j}'$$

Separando por componentes:

$\hat{i}'$] $0 = N - mD\Omega_0^2 + 2m\Omega_0\dot{y}$

$\hat{j}'$] $m\ddot{y} = m\Omega_0^2 y \rightarrow \ddot{y} = \Omega_0^2 y$

Integramos la ecuación de $\hat{j}'$ entre 0 y t, multiplicando ambos lados por $\dot{\phi}$:

$$\int_0^t \ddot{y}\dot{y}\,dt = \int_0^t \Omega_0^2 y\dot{y}\,dt$$

$$\int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}} d\left(\tfrac{1}{2}\dot{y}^2\right) = \int_{y_0}^{y} \Omega_0^2 y\,dy$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\left(\dot{y}^2 - \cancel{\dot{y}_0^2}^{\,0}\right) = \frac{\Omega_0}{\cancel{2}}\left(y^2 - \cancel{y_0^2}^{\,0}\right)$$

$$\dot{y}^2 = \Omega_0 y^2$$

$$|\dot{y}| = \Omega_0|y|$$

Como $y > 0$, $\dot{y} > 0 \rightarrow \dot{y} = \Omega_0 y$

b) Para que se separe del muro imponemos $N = 0$, por lo que la ecuación en $\hat{i}'$ será:

$$mD\Omega_0^2 = 2m\Omega_0\dot{y}$$

Usamos $\dot{y} = \Omega_0 y$

$$\cancel{m}D\cancel{\Omega_0^2} = 2\cancel{m}\cancel{\Omega_0^2}y$$

$$y = D/2$$

∴ Se separa del muro en $y = D/2$.

c) Si la velocidad inicial es en $-\hat{j}$, se tendrá que $\dot{y}<0$, $y<0$, por lo que se mantiene la relación:

$$\dot{y} = \Omega_0 y$$

La expresión para la normal era:

$$N = m\Omega_0^2 (D - 2y)$$

Como $y<0$, $N>0$ y así no se despega del muro $\cancel{}$