FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 23

Conceptos útiles:

- Coordenadas y velocidades generalizadas (i: partícula i-ésima, N: número de partículas/cuerpos):

$$q_i \in \{x, y, z\} \quad \text{o} \quad q_i \in \{\rho, \phi, z\} \quad \text{o} \quad q_i \in \{r, \theta, \phi\} \quad ; \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad ; \quad i \in \{1, ..., 3N\}$$

- Grados de libertad (k: número de restricciones):

$$G.L. = 3N - k$$

- Lagrangiano:

$$L = K - U$$

- Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

Problemas:

1. *a*) Tenemos dos partículas, $N = 2$ y 4 restricciones, 2 por cada partícula: movimiento restringido a un plano y sujeto a una cuerda de largo constante. Con esto, los grados de libertad del sistema son $G.L. = 3(2) - 4 = 2$. Por lo tanto, las coordenadas generalizadas son los dos ángulos que forman los péndulos con la normal: $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$. Determinamos las posiciones y velocidades:

$$\vec{r}_1 = l_1 \text{sen}\theta_1 \hat{i} - l_1 \cos\theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{v}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \hat{i} + l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = (l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2)\hat{i} - (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)\hat{j}$$

$$\vec{v}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2)\hat{i} + (l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2)\hat{j}$$

Determinamos las energías cinéticas de cada partícula y la energía cinética total:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}^2\theta_1) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2)]$$

Notando que el último término corresponde al coseno de una resta, la energía cinética queda:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Determinamos las energías potenciales de cada partícula y la energía potencial total:

$$U_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos\theta_1$$

$$U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

$$U = U_1 + U_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Por lo tanto, el lagrangiano $L = K - U$ del sistema queda:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2}$$

Las ecuaciones de Lagrange son dos, una por cada coordenada. Para θ_1:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = 0}$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

La ecuación de Lagrange para θ_2 es:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = 0}$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

En un análisis superior, podríamos estudiar la dinámica caótica del sistema, o linealizarlo para pequeñas oscilaciones. Por ahora, sólo nos interesan el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento.

b) Un punto cualquiera del aro puede ubicarse con dos coordenadas, x y θ, las cuales están relacionadas por la condición de rodar sin resbalar: $\dot{x} = R\dot{\theta}$. Además de esta restricción, está el hecho de que el aro se mueve en un plano fijo, con lo que los grados de libertad quedan $G.L. = 3(1) - 2 = 1$ Así, podemos usar como coordenada generalizada $q = x$ o $q = \theta$. La energía cinética del aro es:

$$K = K_{tras} + K_{rot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 \quad ; \quad I_{cm} = mR^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial es:

$$U = mgy_{cm} = mg(l - x)\text{sen}\alpha$$

El lagrangiano queda:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mg(l - x)\text{sen}\alpha$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \dot{x}/R$, obtenemos:

$$L = m\dot{x}^2 + mgx\text{sen}\alpha - mgl\text{sen}\alpha$$

Podemos eliminar el último término del lagrangiano, ya que al ser una constante no afecta a las ecuaciones de movimiento (recordemos que las ecuaciones de Lagrange derivan al lagrangiano).

$$L \rightarrow \boxed{L = m\dot{x}^2 + mgx\text{sen}\alpha}$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada x es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg\text{sen}\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x}$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange:

$$mg\text{sen}\alpha - 2m\ddot{x} = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{2}\text{sen}\alpha = 0}$$

Por lo que el aro baja rodando con la mitad de la aceleración que tendría si deslizara sin roce.

c) En primer lugar, notamos que como la velocidad angular del soporte es constante, $\phi = \omega t$. A continuación, calculamos los grados de libertad, teniendo en cuenta que hay dos restricciones: movimiento restringido a un plano fijo y movimiento del soporte del péndulo determinado por su rotación. En consecuencia, $G.L. = 3(1) - 2 = 1$, con lo que la coordenada generalizada corresponde al ángulo θ. En base a lo anterior, determinamos la posición y la velocidad de la partícula:

$$\vec{r} = (a\text{cos}\omega t + l\text{sen}\theta)\hat{\imath} + (a\text{sen}\omega t - l\text{cos}\theta)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = (-a\omega\text{sen}\omega t + l\dot{\theta}\text{cos}\theta)\hat{\imath} + (a\omega\text{cos}\omega t + l\dot{\theta}\text{sen}\theta)\hat{\jmath}$$

Usando la identidad trigonométrica pitagórica, la energía cinética se puede escribir como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}(\text{sen}\theta\text{cos}\omega t - \text{cos}\theta\text{sen}\omega t)]$$

Reconociendo el último término como seno de resta, la energía cinética queda:

$$K = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}\text{sen}(\theta - \omega t)]$$

Por otro lado, la energía potencial es:

$$U = mgy = mg(a\text{sen}\omega t - l\text{cos}\theta)$$

El lagrangiano (inicialmente) es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}\text{sen}(\theta - \omega t)] - mg(a\text{sen}\omega t - l\text{cos}\theta)$$

Podemos eliminar del lagrangiano:

- $(1/2)ma^2\omega^2$; ya que es constante (ver parte b)).
- $-mga\text{sen}\omega t = d/dt(mga\text{cos}\omega t)/\omega$; ya que las derivadas totales con respecto al tiempo no afectan las ecuaciones de movimiento: las ecuaciones de Lagrange toman derivadas parciales del lagrangiano (con respecto a las coordenadas y velocidades generalizadas), y la derivada total con respecto al tiempo de la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la velocidad generalizada. Es por ello que las derivadas totales no se consideran en el lagrangiano.

Con esto, el lagrangiano queda:

$$L \to \boxed{L = \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}\text{sen}(\theta - \omega t)] + mgl\text{cos}\theta}$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada θ es:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ma\omega l\dot{\theta}\text{cos}(\theta - \omega t) - mgl\text{sen}\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ma\omega l\text{sen}(\theta - \omega t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ma\omega l(\dot{\theta} - \omega)\text{cos}(\theta - \omega t)$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange, encontramos la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{a\omega^2}{l}\cos(\theta - \omega t) + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0}$$

Notamos que si $a = 0$ u $\omega = 0$ se recupera la ecuación de movimiento del péndulo simple.

d) Nuevamente, tenemos un péndulo, con lo que $G.L. = 3(1) - 2 = 1$ y la coordenada generalizada es el ángulo θ que éste forma con la normal. Determinamos la posición y velocidad de la partícula:

$$\vec{r} = l(t)\text{sen}\theta\hat{i} - l(t)\cos\theta\hat{j} \quad ; \quad l(t) = l_0(1 + b\,\text{sen}\omega t)$$

$$\vec{v} = (\dot{l}\text{sen}\theta + l\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i} - (\dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\text{sen}\theta)\hat{j} \quad ; \quad \dot{l} = l_0 b\omega\cos\omega t$$

Expandiendo términos, simplificando y utilizando la identidad pitagórica llegamos a que:

$$v^2 = \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2$$

Con esto, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2)$$

Por otro lado, la energía potencial es:

$$U = -mgl(t)\cos\theta$$

De esta manera, el lagrangiano es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

El ojo atento notará que $\dot{l}^2$ es una derivada total, por lo que la podemos sacar del lagrangiano:

$$L \rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta}$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada θ es:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + 2ml\dot{l}\dot{\theta}$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange, llegamos a la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\dot{l}\dot{\theta}}{l} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0}$$

Nuevamente, si $b = 0$ u $\omega = 0$, se recupera la ecuación de movimiento de un péndulo simple.