Auxiliar Extra Examen #2

P1// En el sistema se conserva la energía. Suponiendo que parte desde una altura 0 se tendrá:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{CM}w_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{CM}w_1^2 + MgH$$

Sabemos que $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$, y dada la condición de rodar sin resbalar:

$$w_0 = v_0/R \quad \wedge \quad w_1 = v_1/R$$

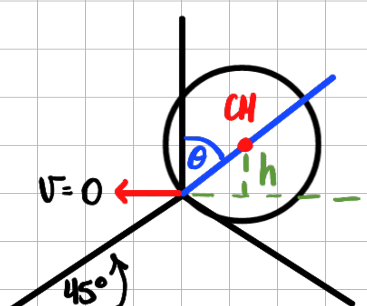
Reemplazando:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{v_1^2}{R^2} + MgH$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{5}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{5}Mv_1^2 + MgH$$

$$\therefore v_0^2 = v_1^2 + \frac{10}{7}gH //$$

b)



Cuando la esfera rote en torno a O también se conservará la energía. Inicialmente:

$$E_i = \frac{1}{2}I_0w_1^2 + Mgh \quad \begin{cases} I_0 = I_{CM} + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 \\ h = R\sin(45) = R\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

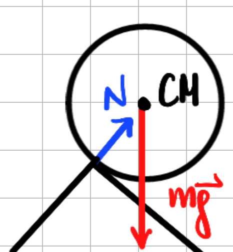
$$E_i = \frac{7}{10}Mv_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}MgR$$

En el punto más alto no habrá energía cinética de ningún tipo. Sólo habra potencial, con la altura igual al radio de la esfera. Así:

$$\frac{7}{10}Mv_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}MgR = MgR$$

$$\therefore v_1^2 \geq \frac{10}{7}\left(1 - \sqrt{2}/2\right)gR$$

c)



Ecuación de movimiento del Centro de Masa en polares

$$\hat{r}\,]\; m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = N - Mg\cos(\phi)$$

$$\hat{\phi}\,]\; m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = -Mg\sin(\phi)$$

De $\hat{r}$ despejamos N, con $r = R$ constante:

$$N = Mg\cos(\phi) - MR\dot{\phi}^2$$

La Normal mínima se alcanza con $\phi = 45° \Rightarrow \cos(\phi) = \sqrt{2}/2$

$$N_{min} = Mg \cdot \sqrt{2}/2 - MR(v_1/R)^2 \geq 0$$

$$\therefore v_1^2 \leq \sqrt{2}/2 \cdot gR$$

P2// Antes de obtener I_O, lo buscamos respecto a su centro de masas, que será diagonal debido a que lo haremos por sus ejes principales.

$$\vec{r} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0)$$

$$I_{11} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^2 - r^2\cos^2(\theta)) \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\left[2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R - \pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right] = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{22} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^2 - r^2\sin^2(\theta)) \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\left[2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R - \pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right] = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{33} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\theta = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_G = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener respecto a O usamos Teorema de Steiner:

$$I^O_{ij} = I^G_{ij} + M(R_G^2 \delta_{ij} - R_{Gi} R_{Gj})$$

Siendo $\vec{R} = (R/2, 0, 0)$. Así:

$$I_O = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Para obtener la Tensión planteamos la forma angular de la segunda Ley de Newton, esto es:

$$I\alpha = \sum_i \tau_i$$

En este caso vemos la componente en $\hat{k}$:

$$\frac{3}{4}MR^2\cancel{\ddot{\theta}}^{\,0} = \frac{MR}{2}g - \frac{3RT}{2}$$

$$\therefore T = Mg/3$$

c) Para esta parte vemos las fuerzas antes y después de que se corte la cuerda:

$$N_1 - Mg + T = 0$$

$$\rightarrow N_1 = 2Mg/3$$

Para después vemos fuerzas y torques. La aceleración estará dada únicamente por $R/2\,\ddot{\theta}$, pues $\ddot{r} = 0$ al no cambiar el radio y $\dot{\theta} = 0$ pues como se acaba de cortar la cuerda recién empezará a rotar, pero hasta el momento estaba quieto.

$$N_2 - Mg = M\cdot\frac{R}{2}\ddot{\theta} \quad \wedge \quad \cancel{M}g\frac{R}{2} = \frac{3\cancel{M}R^2}{4}\ddot{\theta}$$

$$N_2 - Mg = M\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{2g}{3R}$$

$$\therefore N_2 = \frac{4Mg}{3}$$

Luego $\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{2}{3}Mg$