Universidad de Chile
Departamento de Física
FI2001 - Mecánica

Tarea 1: solución

P1. Utilizamos coordenadas esféricas, en dónde el cono cumple $\theta = \theta_0$, por lo tanto $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Solamente existen 2 fuerzas externas en este problema, el peso $(-mg\hat{\mathbf{z}})$ y la normal $(-N\hat{\boldsymbol{\theta}})$, por lo cual las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
ma_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta_0) = -mg\cos\theta_0, && \text{(1a)}\\
ma_\theta &= m(-r\dot{\phi}^2 \sin\theta_0\cos\theta_0) = mg\sin\theta_0 - N, && \text{(1b)}\\
ma_\phi &= m\left[\frac{1}{r\sin\theta_0}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0\right)\right] = 0. && \text{(1c)}
\end{aligned}$$

Lo que buscamos es $\ddot{\mathbf{r}} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, por lo que necesitamos a_r, a_θ, y a_ϕ. De las Ecs. (1a) y (1c) se obtiene respectivamente que $a_r = -gcos\theta_0$ y $a_\phi = 0$, el problema con la Ec. (1b) es que está en términos de $\dot{\phi}$. Dicho problema se soluciona si integramos la Ec. (1c) usando las condiciones inciales, desde dónde se obtiene directamente que

$$\dot{\phi} = \frac{r_0 v_0}{r^2\sin\theta_0}. \tag{2}$$

Usando las Ecs. (1b) y (2) se obtiene a_θ en términos de r, y entonces se obtiene el resultado pedido, es decir,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\cos\theta_0\hat{\mathbf{r}} - \frac{r_0^2 v_0^2\cos\theta_0}{r^3\sin\theta_0}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3}$$

Ahora, desde la Ec. (1c) combinada con la Ec. (2) se obtiene directamente el módulo de la fuerza normal, es decir,

$$N = m\left(g\sin\theta_0 + \frac{r_0^2 v_0^2\cos\theta_0}{r^3\sin\theta_0}\right). \tag{4}$$

P2. Utilizamos coordenadas esféricas, en dónde el cono cumple $\theta = \theta_0$, por lo tanto $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Solamente existen 2 fuerzas externas en este problema, el peso $(-mg\hat{\mathbf{z}})$ y la normal $(-N_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}})$, por lo cual las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
ma_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta_0) = -mg\cos\theta_0, && \text{(5a)}\\
ma_\theta &= m(-r\dot{\phi}^2 \sin\theta_0\cos\theta_0) = mg\sin\theta_0 - N_\theta, && \text{(5b)}\\
ma_\phi &= m\left[\frac{1}{r\sin\theta_0}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0\right)\right] = N_\phi. && \text{(5c)}
\end{aligned}$$

Moverse sobre la varilla con rapidez constante v_0 equivale a $\dot{r} = v_0$ (entonces $\ddot{r} = 0$), y usando las condiciones iniciales se obtiene directamente que $r(t) = L + v_0 t$. Desde la Ec. (5a) se obtiene directamente

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t) = \sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{(L - v_0 t)\sin^2\theta_0}}. \tag{6}$$

Llegar al final en un tiempo τ es equivalente a $r(\tau) = 2L$, entonces es directo que

$$\tau = \frac{L}{v_0}. \tag{7}$$

La fuerza normal es del tipo $\mathbf{N} = N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\phi \hat{\phi}$, por lo tanto su módulo cumple $N = \sqrt{N_\theta^2 + N_\phi^2}$, y la dirección estará dada por algún ángulo $\alpha = \arctan(N_\theta / N_\phi)$. De las Ecs. (5b) y (5c) se obtiene respectivamente que

$$N_\theta = \frac{mg}{\sin\theta_0}, \tag{8a}$$

$$N_\phi = \frac{3}{2} m v_0 \sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{L + v_0 t}}. \tag{8b}$$

Consecuentemente

$$N(t) = \sqrt{\left(\frac{mg}{\sin\theta_0}\right)^2 + \frac{9m^2 v_0^2 g\cos\theta_0}{4(L + v_0 t)}}, \tag{9a}$$

$$\alpha(t) = \arctan\left(\frac{2g}{3v_0 \sin\theta_0}\sqrt{\frac{L + v_0 t}{g\cos\theta_0}}\right). \tag{9b}$$