IN3171: Modelamiento y Optimización

Modelamiento

Matías Romero Yáñez,
matias.romero.y@ing.uchile.cl

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

Viernes 11 de Marzo de 2022

Esquema

Formulación de un Problema de Optimización

- Un problema de optimización busca encontrar el mejor valor (valor óptimo) según una medida de desempeño (función objetivo), considerando ciertas condiciones que la solución debe cumplir.
- Consideremos un espacio de decisiones X (usualmente $X = \mathbb{R}^n$) y $S \subseteq X$ un conjunto de decisiones *factibles*, es decir, que cumplen las restricciones.
- Consideremos $f : S \to \mathbb{R}$ una medida de desempeño.

Problema de Optimización

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{1}$$

Linealidad

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **lineal** si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

Esto es equivalente a que exista $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Diremos que un problema de optimización es un *programa lineal (PL)* si

- La función objetivo es lineal.
- Las restricciones están definidas por funciones lineales.
- La naturaleza de las variables es continua (no discreta).

Esquema

Ejemplo de Problema de Producción

	Pizza	Lasaña	Stock
Tomates	2	3	18
Queso	4	3	24
Precio	8000	7000	

1. ¿Cómo determinar la cantidad de pizzas y lasañas que se deben producir para maximizar ingresos?
2. ¿Cuál es el mayor número de pizzas y lasañas que se pueden producir?

Ejemplo de Problema de Producción - Análisis

- **Parámetros:** Datos del problema. Stock, precios, cantidades en receta.
- **Variables de Decisión:** Determinan lo controlable de las soluciones. Cantidad de pizzas y lasañas a producir.
- **Restricciones:** Condiciones que tiene que cumplir la decisión. Ocupar menos que el stock disponible, cantidades positivas.
- **Función Objetivo:** Criterio que determina una *mejor* decisión. Ingreso o Cantidad.

Ejemplo de Producción - Modelo

Maximizar Ingresos

$$\begin{aligned} \max_{x_P, x_L} \quad & 8000x_P + 7000x_L \\ \text{s.a.} \quad & 2x_P + 3x_L \leq 18 \\ & 4x_P \leq 3x_L \leq 24 \\ & x_P, x_L \geq 0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{P}_1)$$

Maximizar Cantidades

$$\begin{aligned} \max_{x_P, x_L} \quad & x_P + x_L \\ \text{s.a.} \quad & 2x_P + 3x_L \leq 18 \\ & 4x_P \leq 3x_L \leq 24 \\ & x_P, x_L \geq 0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{P}_2)$$

Esquema

Planificación de Personal (Staffing)

- Un hospital busca contratar un equipo de médicos y planificar sus turnos semanales.
- Estimaron que necesitan d_j médicos durante el día j.
- Por regla general, los turnos duran 5 días seguidos.
- El objetivo es determinar la menor cantidad de médicos necesaria para cumplir los requerimientos

Planificación de Personal

Modelo Planificación de Personal

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min\limits_{x} & \sum\limits_{i=1}^{7} x_i & & & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & & +x_4 + x_5 & +x_6 + x_7 & \geq d_1 \\
& x_1 & +x_2 & & + x_5 & +x_6 + x_7 & \geq d_2 \\
& x_1 & +x_2 + x_3 & & & +x_6 + x_7 & \geq d_3 \\
& x_1 & +x_2 + x_3 & +x_4 & & + x_7 & \geq d_4 \\
& x_1 & +x_2 + x_3 & +x_4 + x_5 & & & \geq d_5 \\
& & +x_2 + x_3 & +x_4 + x_5 & +x_6 & & \geq d_6 \\
& & + x_3 & +x_4 + x_5 & +x_6 + x_7 & & \geq d_7 \\
& x_i \in \mathbb{Z} & & & & &
\end{array}
\tag{2}
$$

Problema de la Mochila (Knapsack)

- El problema consiste de n objetos y una mochila de capacidad W.
- Cada artículo i tiene un beneficio b_i y un peso w_i.
- El objetivo es elegir un grupo de objetos que quepa en la mochila y maximice el beneficio.

Problema de la Mochila (Knapsack)

- El problema consiste de n objetos y una mochila de capacidad W.
- Cada artículo i tiene un beneficio b_i y un peso w_i.
- El objetivo es elegir un grupo de objetos que quepa en la mochila y maximice el beneficio.

Modelo del Problema de la Mochila

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1,\ldots,x_n} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Dimensionamiento de Lote (Lot Sizing)

- Una fábrica tiene un stock inicial I_0 de cierto producto.
- Hay que satisfacer demandas $d_1, d_2, \ldots, d_T$ en los próximos T periodos.
- Producir una unidad extra en el periodo t vale p_t.
- El costo fijo de producir en el periodo t es c_t.
- El costo de inventario del periodo t al $t+1$ por caja es h_t.
- El objetivo es decidir cuánto producir en cada periodo para satisfacer la demanda a costo mínimo.

Dimensionamiento de Lote (Lot Sizing)

Modelo de Dimensionamiento de Lote

$$
\begin{aligned}
\min_{(x_t, y_t, I_t)_{t=1}^{T}} \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t x_t + \sum_{t=1}^{T} c_t y_t + \sum_{t=1}^{T-1} h_t I_t \\
\text{s.a.} \quad & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t, \quad t = 1, \ldots, T \\
& x_t \leq \left(\sum_{t=1}^{T} d_t \right) y_t, \quad t = 1, \ldots, T \\
& x_t, I_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T \\
& y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
\tag{4}
$$