IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 4 - Geometría

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

P1. Geometría

a) Considere un poliedro P y suponga que para cada variable x_i se tiene ya sea la restricción $x_i \geq 0$ o la restricción $x_i \leq 0$[1]. ¿Es cierto que P tiene por lo menos una solución básica factible?

b) Sean P y Q poliedros en $\mathbb{R}^n$. Definimos $P + Q = \{x + y | x \in P, y \in Q\}$.

- Muestre que cada punto extremo de $P+Q$ es la suma de un punto extremo de P y un punto extremo de Q.

c) Considere la elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$, donde cada $a_i > 0$. Demuestre que la elipsoide es convexa a través del siguiente argumento alternativo:

- Muestre que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq b\}$, donde $f(x)$ es convexa, es un conjunto convexo.
- Muestre que la función que define a la elipsoide E es convexa.
- Concluya.

P2. Geometria y Degenerancia

Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$\begin{array}{llll l}
\min & -2x_1 & +x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & +2x_3 & \leq 2 \\
 & & 2x_2 & +x_3 & \leq 4 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

1. Dibuje la región factible e identifique todos los puntos extremos.
2. Encuentre la solución óptima y demuestre que es un vértice
3. Escriba el problema en forma estándar e identifique la base óptima
4. Modifique el problema de forma que existan un número infinito de soluciones optimas.
5. Modifique el problema para exista una solución óptima degenerada

[1] Esto no quiere decir que no haya más restricciones en P.

P3. Símplex + Geometría

Considere el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -4 \end{array}$$

1. Grafique el problema e indique la solución óptima.
2. Escriba el problema en formulación estándar. ¿Es el punto asociado a $(x_1, x_2) = (0, 1)$ en el problema de formulación estándar una solución básica factible? Justifique.
3. **SPOILER**: $(x_1, x_2) = (0, 1)$ es SBF. Encuentre una dirección a una SBF adyacente que tenga costo reducido negativo (¿por qué queremos movernos de punto?).
4. Haga una iteración de simplex. Muestre que el nuevo punto es una SBF. Comente si el punto es degenerado o no.

Geometría

Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *solución básica* si corresponde a la intersección de n restricciones linealmente independientes. Si además $x \in P$ (es decir, si satisface todas las restricciones), se dice que x es una *solución básica factible.*

Teo: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de P si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \ldots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \ldots, B(m)\}$, $\quad \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular B^{-1}, $\quad x_B := B^{-1}b$, $\quad z := c_B^t x_B$.
2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.
3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.
4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}$, $\quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*$, $\quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.