IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 4 - Geometría

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

P1. Geometría

a) Falso, el poliedro puede ser infactible y por lo tanto no tener solucion básica factible. Por ejemplo

$$P = \{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_1 \leq -1\}$$

b) Razonaremos por contradicción, sea $\bar{z} = x + y$ un punto extremo de $P + Q$, tal que x o y no sea punto extremo de su respectivo poliedro. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in (0,1), x_1, x_2 \in P, x_1, x_2 \neq x$.

Definamos ahora $z_1 = x_1 + y, z_2 = x_2 + y$, notemos ahora que podemos escribir $\bar{z}$ como combinación lineal convexa de z_1 y z_2

$$\begin{aligned} \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 &= \lambda(x_1 + y) + (1-\lambda)(x_2 + y) \\ &= \underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{x} + \underbrace{\lambda y + (1-\lambda)y}_{y} \\ &= z \rightarrow\leftarrow \end{aligned}$$

c)
- Sean $x, y \in S$, y sea $\lambda \in [0,1]$. Se debe demostrar que $\lambda x + (1 - \lambda y) \in S$.

  $f(\lambda x + (1-\lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda b(1-\lambda)b = b$. En donde la primera desigualdad se obtiene ya que la función $f(\cdot)$ es convexa, y la segunda desiguadad dado que $x, y \in S$. Luego $f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq b$, y por lo tanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

- Sacamos el Heassiano de la función que define a la elipsoide:

  $$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}$$

  Es:

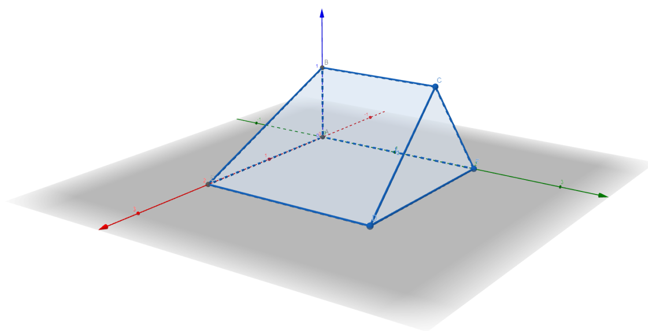
  $$H\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a_1^2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{2}{a_i^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{2}{a_n^2} \end{pmatrix}$$

  Como $H\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)$ es definida positiva, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)$ es convexa.

- Podemos reescribir el conjunto de la elipsoide como $E = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right) \leq b = 1\}$. Como $f(x)$ es convexa y como el conjunto S es convexo, se concluye que la elipsoide E es un conjunto convexo.

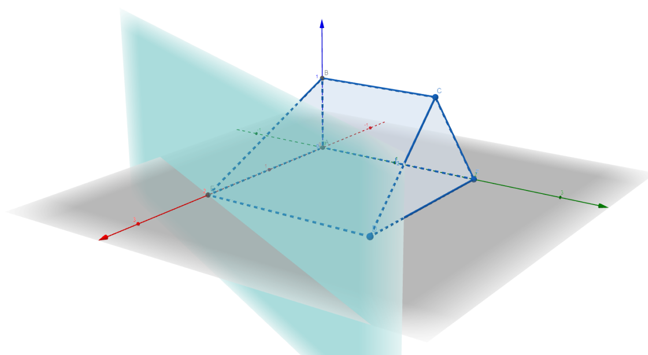
P2. Geometria y Degenerancia

1.



Estudiando el poliedro, es que los puntos extremos son $(0,0,0),(0,0,1),(0,1.5,0),(2,2,0),(2,0,0),(0,2,0)$.

2. En forma gráfica, se estudian las curvas de nivel de la función objetivo y su interacción con el poliedro.



De esto, se tiene por inspección que la solución óptima del problema es el punto $x=(2,0,0)$.

Considerando $c'=(-2,1,0)$ se tiene que que el punto $x=(2,0,0)$, perteneciente al poliedro, es tal que que $c'x<c'y$ para todo punto y en el poliedro distinto a x, es decir, x es vértice.

3. El problema en forma estándar es:

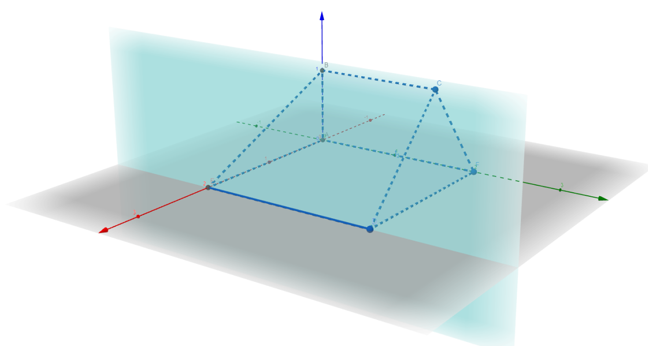
$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -2x_1 & +x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & +2x_3 & +s_1 & & =2 \\
 & & 2x_2 & +x_3 & & +s_2 & =4 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Sabiendo que el punto óptimo en el problema original es $(2,0,0)$, se tiene que su correspondiente en la forma estándar es el punto $x = (2,0,0,0,4)$.

Puesto que en este problema $m = 2$ (número de restricciones distintas a las de naturaleza), es que la base a considerar representa a dos variables, es decir, las variables x_1 y s_2.

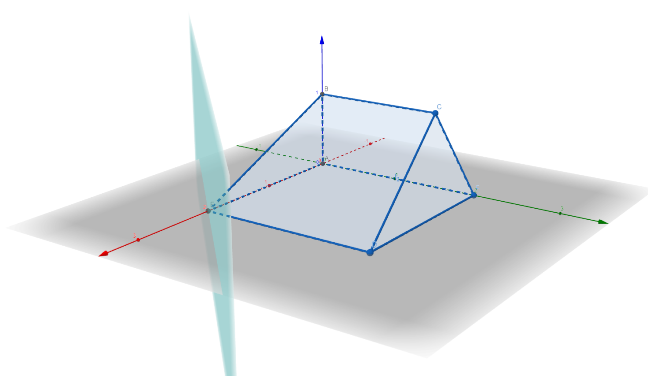
4. Tal que el problema posea un número infinito de soluciones óptimas, se altera la función objetivo de tal forma que sus curvas de nivel sean paralelas a alguna de las aristas del poliedro. Esto en el sentido que existan al menos 2 vértices óptimos,y en consecuencia toda combinación combinación convexa entre estos también será óptima.

Una posible opción es que la función objetivo sea $\min -x_1$.



5. En forma similar, para que el problema tenga una solución óptima degenerada se introduce una restricción al problema tal que el punto óptimo ya mencionado sea activo en esta.

Una posible opción sería introducir la restricción $x_1 - x_2 \leq 2$.



P3. Símplex + Geometría

1. Dado que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el problema es de minimización, es claro que el punto óptimo será aquél que posea la coordenada más pequeña de x_1 y que sea factible.

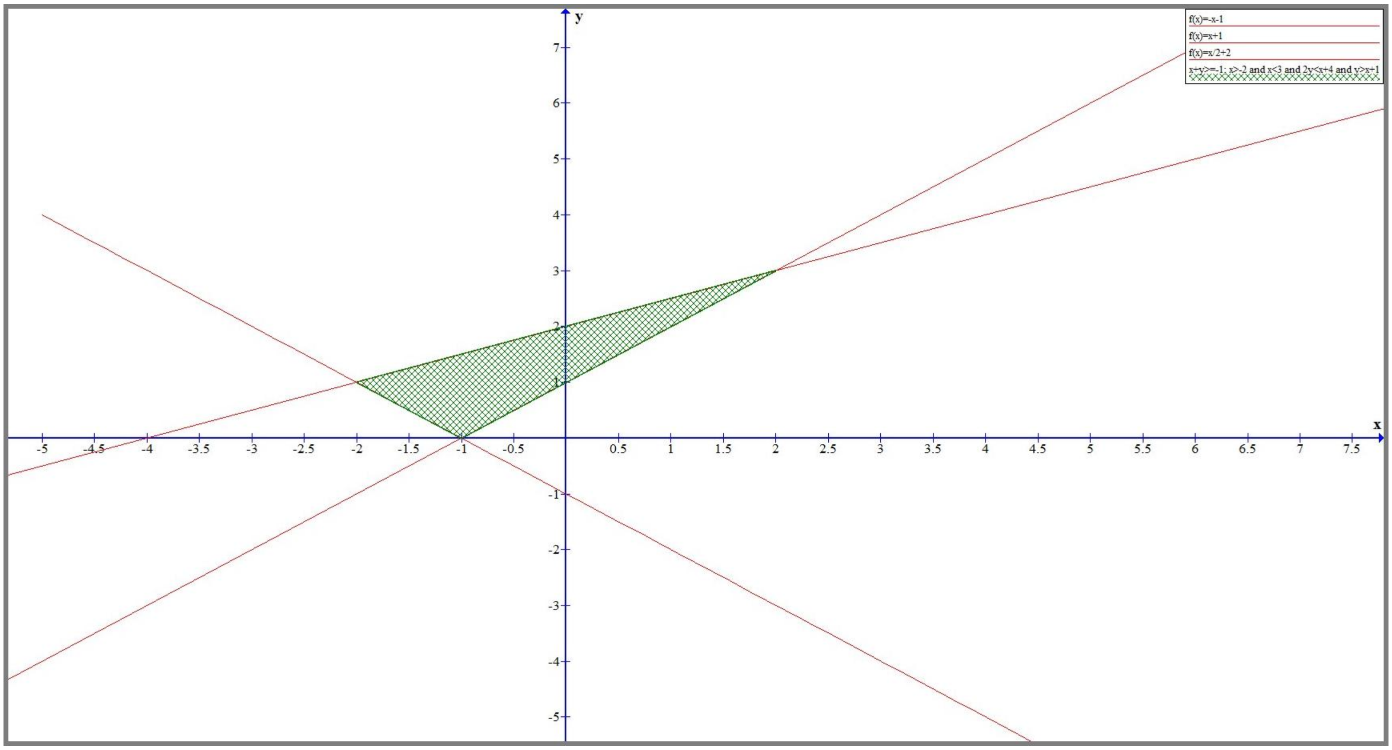


Fig. 1: Gráfico problema pregunta 2.

De la figura 1 se observa que el mínimo se encuentra en el punto $\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.
$$\begin{array}{ll} \min & x_1^+ - x_1^- \\ \text{s.a.} & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- - x_3 = -1 \\ & x_1^+ - x_1^- - x_2^+ + x_2^- + x_4 = -1 \\ & x_1^+ - x_1^- - 2x_2^+ + 2x_2^- - x_5 = -4 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Con $\begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^+ = x_1^- = x_2^- = 0$, $x_2^+ = 1$. Además, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 2$. Para que sea solución básica factible necesitamos $n - m$ variables en 0. Eso es equivalente a $7 - 3 = 4$ variables no básicas. Como x_1^+, x_1^-, x_2^- y x_4 son nulas, entonces el punto $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ es s.b.f.

3. Tenemos que $x_B = \begin{pmatrix} x_2^+ & x_3 & x_5 \end{pmatrix}$ y $x_N = \begin{pmatrix} x_1^+ & x_1^- & x_2^- & x_4 \end{pmatrix}$. Por comodidad, multiplicaremos la restricción 1 y la 3 por -1 para mantener las 3 variables slacks positivas. Así, la matriz básica queda por:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $c_B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que los costos reducidos son:
$\bar{c}_N = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De esta forma, la variable x_1^- es la única que tiene un costo reducido negativo, por lo tanto debe entrar a la base. Ahora sólo nos falta calcular su dirección

$$d_B = -u = -B^{-1}A_j = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así se obtiene

$$d_{x_1^-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. La variable con menor costo reducido es x_1^- por tanto, entra a la base. Para elegir la variable que sale debemos ver el mínimo cuociente de:

$$\min\left\{ \frac{x_i}{u_i^{x_1^-}} \right\} = \min\left\{ \frac{x_2^+}{u_{x_2^+}^{x_1^-}} = \frac{1}{1} = 1 \ , \ \frac{x_3}{u_{x_3}^{x_1^-}} = \frac{2}{2} = 1 \right\}$$

Como ambos son iguales, eligiremos x_2^+ de salida. Así, las nuevas variables básicas son
$x_B = \begin{pmatrix} x_1^- & x_3 & x_5 \end{pmatrix}$ y $x_N = \begin{pmatrix} x_1^+ & x_2^+ & x_2^- & x_4 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para que el nuevo punto sea sbf debe tener $n - m = 4$ variables en 0 lo cual es cierto, incluso posee 5 (las 4 no básicas más la variable x_3) por lo que el punto es degenerado.