# IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 5 - Simplex

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

## 1 Simplex

Considere el siguente programa lineal.

$$
(PL) \quad \begin{array}{lccccccccc}
\min & & -3x_2 & -2x_3 & +x_4 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +2x_4 & & -3x_6 & & = 5 \\
 & & +x_2 & -2x_3 & +4x_4 & +x_5 & -2x_6 & & = 7 \\
 & & +x_2 & & -3x_4 & & -3x_6 & +x_7 & = 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Encuentre una solución básica factible $x$ que corresponde a la base $B = (1, 5, 7)$.
2. Para cada variable no-básica $x_j$, calcule el costo reducido $\bar{c}_j$. Argumente si se puede concluir que $x$ es óptimo.
3. Recuerde que para cada variable no-básica $x_j$, hay una dirección factible $d^j$. ¿Para cuales de las variables no-básicas $x_j$ el valor de la función objetivo
   (a) mejora,
   (b) empeora,
   (c) no cambia,

   si uno va desde $x$ hacia $d^j$, es decir, desde $x$ a un punto $x + \theta d^j$ para un $\theta > 0$? Justifique.
4. Seleccione una variable $x_j$ tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el valor máximo $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j =: y$ es un punto factible para $(PL)$. Escriba una base $B'$ que corresponde a $y$.
5. Sea $P$ el conjunto de los puntos factibles de $(PL)$. Demuestre sí $P$ contiene una linea o no.

## 2 Aun más Simplex

Considere el problema de optimización lineal

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & x_1 - x_2 \leq -1 \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -4
\end{array}
$$

1. Grafique el problema e indique la solución óptima.
2. Escriba el problema en formulación estándar. ¿Es el punto asociado a $(x_1, x_2) = (0, 1)$ en el problema de formulación estándar una solución básica factible? Justifique.

3. **SPOILER**: $(x_1, x_2) = (0, 1)$ es SBF. Encuentre una dirección a una SBF adyacente que tenga costo reducido negativo (¿por qué queremos movernos de punto?).

4. Haga una iteración de simplex. Muestre que el nuevo punto es una SBF. Comente si el punto es degenerado o no.

**Geometría**

**Teo:** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de $P$ si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \dots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$.

**Algoritmo Símplex**

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango $m$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible $B$, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \dots, B(m)\}, \quad \mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular $B^{-1}, \quad x_B := B^{-1}b, \quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1} A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base $B$ reemplazando $A_{B(\ell)}$ por $A_j$ en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}, \quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que $x_j$ entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*, \quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.