IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 5 - Simplex

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

1 Simplex

Considere el siguente programa lineal.

$$
(PL)\quad \begin{array}{lccccccccc}
\min & & -3x_2 & -2x_3 & +x_4 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +2x_4 & & -3x_6 & & =5 \\
 & & +x_2 & -2x_3 & +4x_4 & +x_5 & -2x_6 & & =7 \\
 & & +x_2 & & -3x_4 & & -3x_6 & +x_7 & =3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Encuentre una solución básica factible x que corresponde a la base $B = (1, 5, 7)$. **Respuesta:** Considerando x_1, x_5, x_7 como variables básicas, se procede a hacer el resto igual a 0 al ser un problema de forma standard, y se obtiene el punto (5,0,0,0,7,0,3). Se ouede obtener tanto reemplazando o utilizando $A_b^-1 * b = x_b$ Para cada variable no-básica x_j, calcule el costo reducido $\bar{c}_j$. Argumente si se puede concluir que x es óptimo. **Respuesta:**
   Se puede notar que los costos asociados a las variables básicas es un vector de puros ceros, por lo tanto el vector de costos reducidos $\bar{C}$ sería los costos de las variables nó basicas (-3,-2,1,0), y como no es positivo, no es el óptimo.

2. Recuerde que para cada variable no-básica x_j, hay una dirección factible d^j. ¿Para cuales de las variables no-básicas x_j el valor de la función objetivo

   (a) mejora,
   (b) empeora,
   (c) no cambia,

   si uno va desde x hacia d^j, es decir, desde x a un punto $x + \theta d^j$ para un $\theta > 0$? Justifique.
   Respuesta:

   (a) mejora para x_2 y x_3
   (b) empeora para x_4
   (c) no cambia para x_6

   Esto sucede pues los costos reducidos representan la cantidad que va a variar la función objetivo si nos movemos de x a $x + \theta d^j$, se decir, si vale la pena o no hacer que una variable no básica se vuelva distinta de 0. El valer la pena hace referencia a que si el costo reducido es negativo y buscamos minimizar una función, entonces al hacer la variable no basica asociada a ese costo reducido negativo distinta de 0, se estaría agregando ese costo a la función objetivo por unidad. Seleccione una variable x_j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el valor máximo $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j =: y$ es un punto factible para (PL). Escriba una base B' que corresponde a y.
   Respuesta:

Se pueden elegir tanto x_2 como x_3. Se hará el desarrollo para x_2. Notar que $A_b = A_b^{-1} = I$ y que el punto es $x = (5, 0, 0, 0, 7, 0, 3)$

- Se elige x_2 para entrar a la base. Se calcula la dirección asociada a que la variable no básica entre a la base $d_j = -A_b^-1 * A_j = -(-2, 1, 1) = (2, -1, -1) = (d_1, d_5, d_7)$. Finalmente el vector d es (2,1,0,0,-1,0,-1). Este se obtiene pues el $d_j = d_b$ es el vector que nos muestra como van a variar las variablés básicas y $d_n = (0, \cdots, 1_j, \cdots, 0)$ donde ese 1 es en la coordenada de la varible no básica que entrará a la base. Se procede a calcular X+ $\theta d \geq 0$, es decir

$$\begin{array}{lll} x_1 & +\theta d_1 & \geq 0 \\ x_2 & +\theta d_2 & \geq 0 \\ x_3 & +\theta d_3 & \geq 0 \\ x_4 & +\theta d_4 & \geq 0 \\ x_5 & +\theta d_5 & \geq 0 \\ x_6 & +\theta d_6 & \geq 0 \\ x_7 & +\theta d_7 & \geq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrl} 5 & +2\theta & \geq 0 \\ 0 & +\theta & \geq 0 \\ 0 & +0 & \geq 0 \\ 0 & +0 & \geq 0 \\ 7 & -\theta & \geq 0 \\ 0 & +0 & \geq 0 \\ 3 & -\theta & \geq 0 \end{array}$$

  FInalmente se obtiene que el θ más chico que rompe la desigualdad es $\theta = 3$ finalmente, reemplazamos y se calcula $x + 3d$ obteniendo el punto (11,3,0,0,4,0,0), lo que implica que x_7 salio de la base y que la base del punto finalmente es B=[1,2,5]

Sea P el conjunto de los puntos factibles de (PL). Demuestre sí P contiene una linea o no. **Respuesta:** Como el poliedro tiene una SBF, se puede asegurar, utilizando el teorema de que **si un poliedro que pertenece a $\mathbb{R}^n$ contiene una linea, entonces no hay N restricciones L.I que se puedan activar en este, y por lo tanto, no tiene una SBF.**, de que el poliedro no tiene una linea, ya que se puede utilizar la negación del teorema. enumerate

2 Aun más Simplex

Considere el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -4 \end{array}$$

(a) Grafique el problema e indique la solución óptima.

(b) Escriba el problema en formulación estándar. ¿Es el punto asociado a $(x_1, x_2) = (0, 1)$ en el problema de formulación estándar una solución básica factible? Justifique.

(c) **SPOILER**: $(x_1, x_2) = (0, 1)$ es SBF. Encuentre una dirección a una SBF adyacente que tenga costo reducido negativo (¿por qué queremos movernos de punto?).

(d) Haga una iteración de simplex. Muestre que el nuevo punto es una SBF. Comente si el punto es degenerado o no.

PAUTA P2

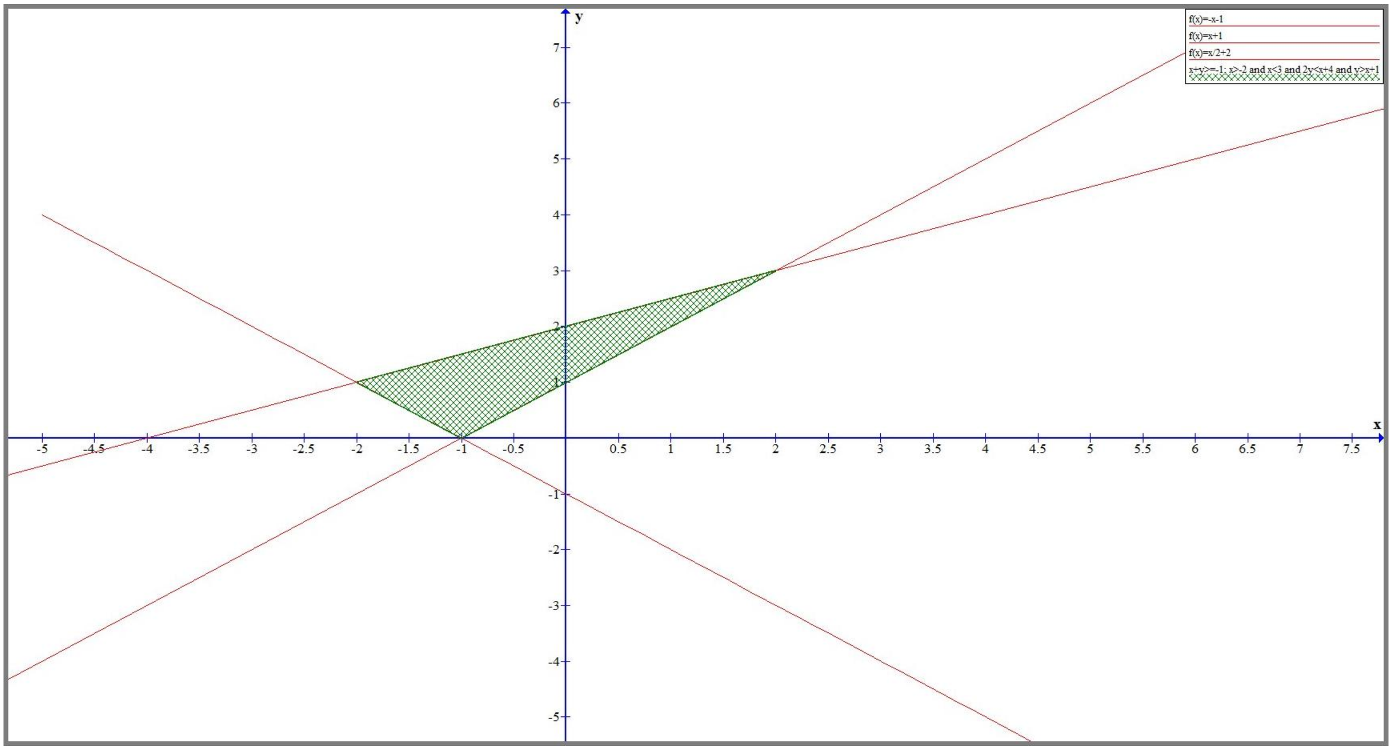

Fig. 1: Gráfico problema pregunta 2.

(a) Dado que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el problema es de minimización, es claro que el punto óptimo será aquél que posea la coordenada más pequeña de x_1 y que sea factible.

De la figura 1 se observa que el mínimo se encuentra en el punto $\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^+ - x_1^- \\ \text{s.a.} & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- - x_3 = -1 \\ & x_1^+ - x_1^- - x_2^+ + x_2^- + x_4 = -1 \\ & x_1^+ - x_1^- - 2x_2^+ + 2x_2^- - x_5 = -4 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Con $\begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^+ = x_1^- = x_2^- = 0$, $x_2^+ = 1$. Además, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 2$. Para que sea solución básica factible necesitamos $n - m$ variables en 0. Eso es equivalente a $7 - 3 = 4$ variables no básicas. Como x_1^+, x_1^-, x_2^- y x_4 son nulas, entonces el punto $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ es s.b.f.

(c) Tenemos que $x_B = \begin{pmatrix} x_2^+ & x_3 & x_5 \end{pmatrix}$ y $x_N = \begin{pmatrix} x_1^+ & x_1^- & x_2^- & x_4 \end{pmatrix}$. Por comodidad, multiplicaremos la restricción 1 y la 3 por -1 para mantener las 3 variables slacks positivas. Así, la matriz básica queda por:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \ N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $c_B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que los costos reducidos son:

$\bar{c}_N = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De esta forma, la variable x_1^- es la única que tiene un costo reducido negativo, por lo tanto debe entrar a la base. Ahora sólo nos falta calcular su dirección

$$d_B = -u = -B^{-1}A_j = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así se obtiene

$$d_{x_1^-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) La variable con menor costo reducido es x_1^- por tanto, entra a la base. Para elegir la variable que sale debemos ver el mínimo cuociente de:

$$\min \left\{ \frac{x_i}{u_i^{x_1^-}} \right\} = \min \left\{ \frac{x_2^+}{u_{x_2^+}^{x_1^-}} = \frac{1}{1} = 1 \; , \quad \frac{x_3}{u_{x_3}^{x_1^-}} = \frac{2}{2} = 1 \right\}$$

Como ambos son iguales, eligiremos x_2^+ de salida. Así, las nuevas variables básicas son $x_B = \begin{pmatrix} x_1^- & x_3 & x_5 \end{pmatrix}$ y $x_N = \begin{pmatrix} x_1^+ & x_2^+ & x_2^- & x_4 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para que el nuevo punto sea sbf debe tener $n - m = 4$ variables en 0 lo cual es cierto, incluso posee 5 (las 4 no básicas más la variable x_3) por lo que el punto es degenerado.

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(a) **Inicialización:**
Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \ldots, B(m)\}, \quad \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
Calcular $B^{-1}, \quad x_B := B^{-1}b, \quad z := c_B^t x_B$.

(b) **Test de optimalidad:**
Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
Si $\forall\ j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

(c) **Test de factibilidad:**
Calcular $u := B^{-1}A_j$.
Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid u_i > 0\}$.
Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
Si no, calcular $\theta^* := \min\limits_{i\in\mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

(d) **Actualizar:**
Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
$\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}, \quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
$x_j := \theta^*, \quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
$z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
Calcular $B^{-1}(*)$.
Ir a 2.