IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 5 - Simplex

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \ldots, B(m)\}$, $\quad \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular B^{-1}, $\quad x_B := B^{-1}b$, $\quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min_{i\in\mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}$, $\quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*$, $\quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.

P1.

Resuelva el siguiente problema de optimización mediante el algoritmo simplex.

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

P2. Considere el método Simplex aplicado a un problema en forma estándar y suponga que la matriz A tienen m filas linealmente independientes. Para cada una de las siguientes aseveraciones, entregue una prueba o un contraejemplo:

a) Una iteración puede moverse una distancia positiva hacia una nueva solución sin cambiar la función objetivo.

b) Una solución óptima encontrada por el método Simplex tiene a lo más m componentes estrictamente positivas.

c) Una variable que acaba de dejar la base no puede entrar nuevamente en la siguiente iteración.

d) Una variable que acaba de ingresar a la base no puede salir en la siguiente iteración.